

Краевые задачи теории упругости для ортотропной пластины, ослабленной взаимно перпендикулярными разрезами

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Предложен аналитический метод исследования симметричных краевых задач теории упругости для тонкой ортотропной пластины, ослабленной разрезами на разных осях анизотропии. Он основан на применении новых соотношений между базисными гармоническими функциями в различных эллиптических системах координат и приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с быстро убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективный анализ напряженно-деформированного состояния вблизи разрезов, в частности получить простые асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений.

Ключевые слова: ортотропная пластина, разрез, гармоническая функция.

Введение

В вопросах прочности материалов и элементов конструкций используют в основном информацию о напряженно-деформированном состоянии вблизи отверстий, трещин (разрезов), включений и т. д. Получение достоверной и полной информации такого рода непосредственно связано с использованием точных решений соответствующих краевых задач.

Имеется лишь небольшое число работ, ориентированных на построение новых и развитие имеющихся аналитических методов исследования задач теории упругости для многосвязных ортотропных тел. Это обстоятельство обусловлено существенными математическими трудностями построения эффективных методов точной реализации граничных условий исходных краевых задач.

Начала реализуемого здесь подхода заложены в работах [1, 2], где получены специальные представления общих решений уравнений равновесия двумерных (плоских) задач теории упругости для ортотропных тел, ограниченных координатными линиями декартовой, параболической и эллиптической систем координат.

1. Общие положения

Пусть δ_1, δ_2 ($\delta_j > 0, j=1,2$) – безразмерные величины, определяемые формулами

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = \omega = \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}, \quad \delta_1^2 \delta_2^2 = \gamma = \frac{E_1}{E_2} \quad (\omega > 0, \omega^2 - 4\gamma \geq 0),$$

где $E_1 = E_x$; $E_2 = E_y$ – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей x и y ; $G_{12} = G_{xy}$ – модуль сдвига в плоскости Oxy ; $\nu_{12} = \nu_{xy}$ – коэффициент Пуассона.

Частные решения двумерных уравнений равновесия ортотропных в осях x и y пластин представим в виде [1, 2]

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial y} = -a \frac{\partial I_j}{\partial y_j}, \quad \sigma_x^{(j)} = -a \delta_j \frac{\partial I_j}{\partial x}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial x} = -\delta_j^{-2} \sigma_x^{(j)};$$

$$u_x^{(j)} = -\frac{a(\delta_j^2 + \nu_{12})}{\delta_j E_1} I_j, \quad u_y^{(j)} = \frac{a(\delta_{3-j}^2 + \nu_{12})}{E_1} \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_1 \quad (j=1,2), \quad (1)$$

где $I_j = I_j(x, y_j)$ – гармонические функции переменных $x, y_j = \delta_j y$; a – параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат.

При этом в формулах (2) I_j и $\int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy$ – сопряженные гармонические функции переменных x, y_j .

Положим

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)};$$

$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, \quad u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)}. \quad (2)$$

При $\delta_1 \neq \delta_2$ ($\omega^2 \neq 4\gamma$) представления (2) являются общими (функции I_j линейно независимы). В случае $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ($\omega^2 = 4\gamma$) функции I_1, I_2 образуют линейно зависимую систему, и тогда надо либо построить решение уравнений равновесия, не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью гармонической функции I_1), либо в решении исходной краевой задачи осуществить предельный переход $\delta_2 \rightarrow \delta_1 = \delta$.

2. Функциональная структура вектора напряжений в эллиптических координатах

Пусть $\langle x, y \rangle, \langle \xi, \theta \rangle$ – исходные декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями

$$x = a sh \xi \sin \theta, \quad y = a ch \xi \cos \theta \quad (a > 0; -\infty < \xi < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi). \quad (3)$$

Уравнение $\theta = \theta_0 = const \left(\theta_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right)$ задает гиперболу

$$\frac{y^2}{(a \cos \theta_0)^2} - \frac{x^2}{(a \sin \theta_0)^2} = 1. \quad (4)$$

При $\delta_1 \neq \delta_2$ каждую из гармонических функций I_j ($j=1,2$) будем рассматривать как функцию эллиптических координат ξ_j, θ_j , определяемых формулами

$$x_j = x = a_j sh \xi_j \sin \theta_j, \quad y_j = \delta_j y = a_j ch \xi_j \cos \theta_j \quad (a_j > 0, -\infty < \xi_j < \infty, 0 \leq \theta_j \leq \pi). \quad (5)$$

Уравнение $\theta_j = \theta_{j0} = const \left(\theta_{j0} \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right)$ определяет гиперболу

$$\frac{y_j^2}{(a_j \cos \theta_{j0})^2} - \frac{x_j^2}{(a_j \sin \theta_{j0})^2} = 1 \quad (x_j = x, y_j = \delta_j y), \quad (6)$$

совпадающую с гиперболой (4) при условии, что

$$a_j \cos \theta_{j0} = \delta_j a \cos \theta_0, \quad a_j \sin \theta_{j0} = a \sin \theta_0 \quad (j=1,2). \quad (7)$$

Тогда из соотношений (3), (5), (7) следует, что на границах $\theta = \theta_0, \theta_j = \theta_{j0}$

гиперболических областей $0 \leq \theta < \theta_0, 0 \leq \theta_j < \theta_{j0} \left(\theta_0, \theta_{j0} < \frac{\pi}{2} \right); \theta_0 < \theta \leq \pi,$

$\theta_{j0} < \theta_j \leq \pi \left(\theta_0, \theta_{j0} > \frac{\pi}{2} \right); \theta_0 < \theta \leq \pi, \theta_{j0} < \theta_j \leq \pi \left(\theta_0, \theta_{j0} < \frac{\pi}{2} \right); 0 \leq \theta < \theta_0,$

$0 \leq \theta_j < \theta_{j0} \left(\theta_0, \theta_{j0} > \frac{\pi}{2} \right)$ выполняются равенства

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi. \quad (8)$$

Направляющие косинусы единичных внешних нормалей $\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y,$

$\vec{n}_j = n_x^{(j)} \vec{e}_x + n_y^{(j)} \vec{e}_y$ к границам (4), (6) внешних областей $\theta_0 < \theta \leq \pi, \theta_{j0} < \theta_j \leq \pi$

$\left(\theta_0, \theta_{j0} < \frac{\pi}{2} \right)$ определяются формулами

$$n_x = -\frac{sh\xi \cos \theta_0}{h_0}, \quad n_y = \frac{ch\xi \sin \theta_0}{h_0}, \quad n_x^{(j)} = -\frac{sh\xi_j \cos \theta_{j0}}{\delta_j h_{j0}}, \quad n_y^{(j)} = \frac{ch\xi_j \sin \theta_{j0}}{h_{j0}};$$

$$h_0 = \sqrt{ch^2 \xi - \cos^2 \theta_0}, \quad h_{j0} = \sqrt{\left(\delta_j^{-1} \cos \theta_{j0} \right)^2 sh^2 \xi_j + ch^2 \xi_j \sin^2 \theta_{j0}} \quad (j=1,2). \quad (9)$$

Из равенств (7) – (9) следует, что на граничных линиях (гиперболах) $\theta = \theta_0, \theta_j = \theta_{j0}$ направляющие косинусы совпадают:

$$n_x^{(j)} = n_x, \quad n_y^{(j)} = n_y \quad (j=1,2). \quad (10)$$

Если на границе пластины задан вектор сил $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y,$ то его проекции на оси декартовой системы координат выражаются формулами

$F_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \quad F_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y.$ Найдем проекции $F_x^{(j)} = \sigma_x^{(j)} n_x^{(j)} + \tau_{xy}^{(j)} n_y^{(j)}, \quad F_y^{(j)} = \tau_{xy}^{(j)} n_x^{(j)} + \sigma_y^{(j)} n_y^{(j)}$ векторов сил $\vec{F}_j = F_x^{(j)} \vec{e}_x + F_y^{(j)} \vec{e}_y$

на границах $\theta_j = \theta_{j0} \left(0 < \theta_{j0} < \frac{\pi}{2} \right)$, соответствующие частным решениям (1).

Поскольку

$$a_1 h_{10} = a_2 h_{20} = a h_0, \quad \tau_{xy}^{(j)} = -a \frac{\partial I_j}{\partial y_j} = -\frac{a}{a_j h_j^2} \left(sh \xi_j \cos \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} - ch \xi_j \sin \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} \right),$$

$$\sigma_x^{(j)} = -a \delta_j \frac{\partial I_j}{\partial x} = -\frac{a \delta_j}{a_j h_j^2} \left(ch \xi_j \sin \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} + sh \xi_j \cos \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} \right), \quad \sigma_y^{(j)} = -\frac{\sigma_x^{(j)}}{\delta_j^2};$$

$$h_j^2 = \sqrt{ch^2 \xi_j - \cos^2 \theta_j}, \quad ch^2 \xi_j \sin^2 \theta_j + sh^2 \xi_j \cos^2 \theta_j = h_j^2, \quad (11)$$

то на основании (2), (7) – (11) получаем простые формулы

$$F_{x/\theta_j=\theta_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} \Big|_{\theta_j = \theta_{j0}},$$

$$F_{y/\theta_j=\theta_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{\delta_j h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} \Big|_{\theta_j = \theta_{j0}} \left(\xi_j / \theta_j = \theta_{j0} = \xi / \theta = \theta_0 \right),$$

$$F_{x/\theta=\theta_0} = F_{x/\theta_1=\theta_{10}}^{(1)} + F_{x/\theta_2=\theta_{20}}^{(2)}, \quad F_{y/\theta=\theta_0} = F_{y/\theta_1=\theta_{10}}^{(1)} + F_{y/\theta_2=\theta_{20}}^{(2)}. \quad (12)$$

В предельном случае, когда $\theta_0 = 0 (\theta_{j0} = 0)$, гиперболы $\theta = \theta_0$, $\theta_j = \theta_{j0}$ вырождаются в один и тот же полубесконечный разрез $x = \pm 0, y \geq a$, причем $a_j = \delta_j a, h_0 = |sh \xi|$.

Введем теперь координатные системы $\langle \bar{\xi}, \bar{\theta} \rangle, \langle \bar{\xi}_j, \bar{\theta}_j \rangle$, связанные с координатными системами $\langle x, y \rangle, \langle x_j, y_j \rangle$ соотношениями

$$\bar{x} = a ch \bar{\xi} \cos \bar{\theta}, \quad y = a sh \bar{\xi} \sin \bar{\theta} \quad (\bar{a} > 0, 0 \leq \bar{\xi} < \infty, 0 \leq \bar{\theta} \leq 2\pi);$$

$$x_j = x = \bar{a}_j ch \bar{\xi}_j \cos \bar{\theta}_j, \quad y_j = \delta_j y = \bar{a}_j sh \bar{\xi}_j \sin \bar{\theta}_j \quad (\bar{a}_j > 0, 0 \leq \bar{\xi}_j < \infty, 0 \leq \bar{\theta}_j \leq 2\pi). \quad (13)$$

Уравнения $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 = const, \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0} = const (j = 1, 2)$ задают эллипсы

$$\frac{x^2}{(\bar{a} ch \bar{\xi}_0)^2} + \frac{y^2}{(\bar{a} sh \bar{\xi}_0)^2} = 1, \quad \frac{x_j^2}{(\bar{a}_j ch \bar{\xi}_{j0})^2} + \frac{y_j^2}{(\bar{a}_j sh \bar{\xi}_{j0})^2} = 1 \quad (x_j = x, y_j = \delta_j y),$$

совпадающие друг с другом при условии, что

$$\bar{a}_j ch \bar{\xi}_{j0} = \bar{a} ch \bar{\xi}_0, \quad \bar{a}_j sh \bar{\xi}_{j0} = \delta_j \bar{a} sh \bar{\xi}_0 \quad (j = 1, 2). \quad (14)$$

Тогда из соотношений (13), (14) следует, что на границах $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}$ эллиптических областей $0 \leq \bar{\xi} < \bar{\xi}_0$, $0 \leq \bar{\xi}_j < \bar{\xi}_{j0}$, $\bar{\xi}_0 < \bar{\xi} < \infty$, $\bar{\xi}_{j0} < \bar{\xi}_j < \infty$ выполняются равенства $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}$.

Если на границе $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$ области $\bar{\xi}_0 < \bar{\xi} < \infty$ задан вектор сил \vec{F} , то его проекции на оси декартовой системы координат $\langle x, y \rangle$ выражаются формулами [3]

$$F_{x/\bar{\xi}=\bar{\xi}_0} = F_{x/\bar{\xi}_1=\bar{\xi}_{10}}^{(1)} + F_{x/\bar{\xi}_2=\bar{\xi}_{20}}^{(2)}, \quad F_{y/\bar{\xi}=\bar{\xi}_0} = F_{y/\bar{\xi}_1=\bar{\xi}_{10}}^{(1)} + F_{y/\bar{\xi}_2=\bar{\xi}_{20}}^{(2)};$$

$$F_{x/\bar{\xi}_j=\bar{\xi}_{j0}}^{(j)} = \frac{a}{a\bar{h}_0} \frac{\partial I_j}{\partial \bar{\xi}_j / \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}}, \quad F_{y/\bar{\xi}_j=\bar{\xi}_{j0}}^{(j)} = \frac{a}{\delta_j a \bar{h}_0} \frac{\partial I_j}{\partial \bar{\theta}_j / \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}}; \quad (15)$$

$$\bar{h}_0 = \sqrt{ch^2 \bar{\xi}_0 - \cos^2 \bar{\theta}}, \quad \bar{\theta}_j / \bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0} = \bar{\theta} / \bar{\xi} = \bar{\xi}_0.$$

В предельном случае $\bar{\xi}_0 = 0$ ($\bar{\xi}_{j0} = 0$) эллипсы $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j0}$ вырождаются в один и тот же разрез $|\bar{x}| \leq a$, $\bar{y} = \pm 0$, причем $\bar{a}_j = \bar{a}$, $\bar{h}_0 = |\sin \bar{\theta}|$.

3. Формулы разложения базисных гармонических функций

Базисные гармонические функции $sh \lambda \theta_j \sin \lambda \xi_j$, $sh \lambda (\pi - \theta_j) \sin \lambda \xi_j$, $e^{-(2n+1)\bar{\xi}_j} \cos(2n+1)\bar{\theta}_j$, $e^{-2n\bar{\xi}_j} \sin 2n\bar{\theta}_j$, $ch(2n+1)\bar{\xi}_j \cos(2n+1)\bar{\theta}_j$, $sh 2n\bar{\xi}_j \sin 2n\bar{\theta}_j$, соответствующие координатным системам $\langle \xi_j, \theta_j \rangle$, $\langle \bar{\xi}_j, \bar{\theta}_j \rangle$ и обеспечивающие симметрию исходных краевых задач, связаны между собой соотношениями

$$sh \lambda (\pi - \theta_j) \sin \lambda \xi_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^{(j)}(\lambda) ch(2n+1)\bar{\xi}_j \cos(2n+1)\bar{\theta}_j +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^{(j)}(\lambda) sh 2n\bar{\xi}_j \sin 2n\bar{\theta}_j \quad (\bar{a}_j \sin \bar{\xi}_j \sin \bar{\theta}_j = y_j \leq a_j),$$

$$e^{-(2n+1)\bar{\xi}_j} \cos(2n+1)\bar{\theta}_j = \int_0^{\infty} b_{2n+1}^{(j)}(\lambda) sh \lambda \theta_j \sin \lambda \xi_j d\lambda,$$

$$e^{-2n\bar{\xi}_j} \sin 2n\bar{\theta}_j = \int_0^{\infty} b_{2n}^{(j)}(\lambda) sh \lambda \theta_j \sin \lambda \xi_j d\lambda, \quad (a_j ch \xi_j \cos \theta_j = y_j \geq 0), \quad (16)$$

в которых

$$b_{2n+1}^{(j)}(\lambda) = (-1)^n (2n+1) c_{2n+1}^{(j)}(\lambda), \quad b_{2n}^{(j)}(\lambda) = 2n (-1)^{n-1} c_{2n}^{(j)}(\lambda),$$

$$a_{2n+1}^{(j)}(\lambda) = (-1)^n \lambda c_{2n+1}^{(j)}(\lambda) \operatorname{sh} \pi \lambda, \quad a_{2n}^{(j)}(\lambda) = (-1)^{n-1} \lambda c_{2n}^{(j)}(\lambda) \operatorname{sh} \pi \lambda;$$

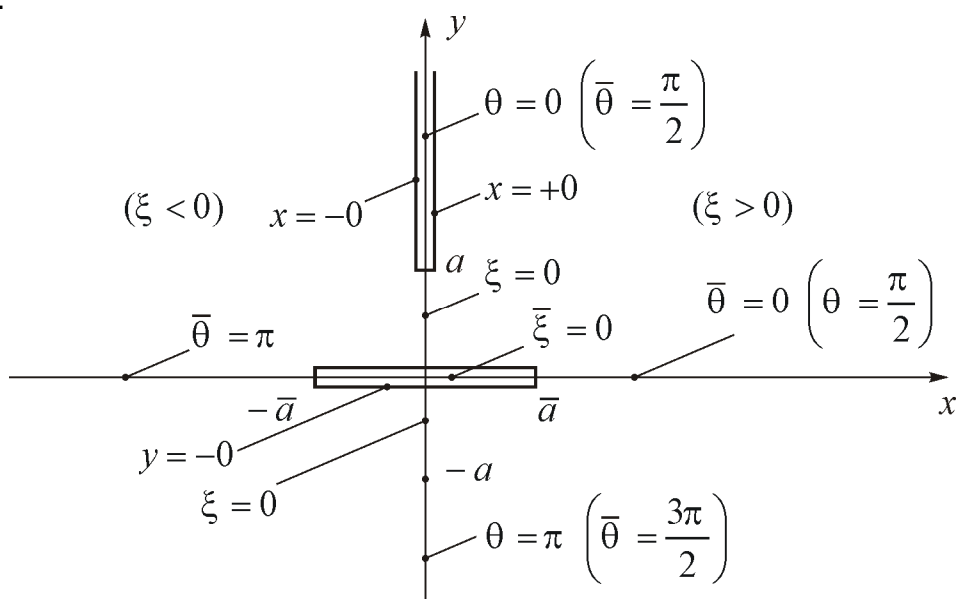
$$c_l^{(j)}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mu^{-1} J_l(\bar{a}_j \mu) K_{i\lambda}(a_j \mu) d\mu,$$

$J_l(z)$ – функция Бесселя первого рода, $K_{i\lambda}(z)$ – функция Макдональда мнимого индекса.

Методика получения такого рода разложений гармонических функций изложена в работе [4]. В сочетании с методом Фурье разложения (16) позволяют точно удовлетворить граничным условиям симметричных по координате x краевых задач теории упругости для неограниченной ортотропной пластины, ослабленной эллиптическим и гиперболическим вырезами, в частности конечным и полубесконечным разрезами на разных осях анизотропии.

4. Первая основная краевая задача

Рассмотрим симметричный по координате x вариант равновесия пластины $-\infty < x, y < \infty$, ослабленной разрезами $y = \pm 0, |x| < \bar{a}$ и $x = \pm 0, a < y < \infty$ (рисунок).



Геометрия пластины

Ограничимся случаем, когда берега разреза $y = \pm 0, |x| < \bar{a}$ подвержены действию равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности $\sigma_0 = const$ ($\sigma_0 > 0$), а берега разреза $x = \pm 0, a < y < \infty$ свободны от внешних усилий. В силу симметрии задачи по координате x достаточно удовлетворить граничным условиям

$$F_{x/\bar{\xi}=0(y=\pm 0)} = 0, F_{y/\bar{\xi}=0(y=\pm 0)} = \pm \sigma_0; F_{x/\theta=0(x=+0)} = 0, F_{y/\theta=0(x=+0)} = 0. \quad (17)$$

Гармонические функции I_j ($j=1,2$), учитывающие симметрию задачи по координате x , выберем в виде

$$I_j = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(j)} e^{-(2n+1)\bar{\xi}_j} \cos(2n+1)\bar{\theta}_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(j)} e^{-2n\bar{\xi}_j} \sin 2n\bar{\theta}_j + \int_0^{\infty} D_j(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi - \theta_j) \sin \lambda \bar{\xi}_j d\lambda.$$

Удовлетворяя теперь граничным условиям (17) на основе представлений (12), (15), разложений (16) и учитывая, что $\theta_0 = 0, \theta_{j_0} = 0, \bar{\xi}_0 = 0, \bar{\xi}_{j_0} = 0, a_j = \delta_j a, \bar{a}_j = \bar{a}$, получаем следующие связи между искомыми коэффициентами $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}$ и плотностями $D_j(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = 0, \quad \frac{1}{\delta_1} B_n^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} B_n^{(2)} = 0; \quad \frac{1}{\delta_1} D_1(\lambda) + \frac{1}{\delta_2} D_2(\lambda) = 0, \\ D_1(\lambda) + D_2(\lambda) = \frac{1}{ch\pi\lambda} \left[\sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(j)} b_{2k+1}^{(j)}(\lambda) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(j)} b_{2k}^{(j)}(\lambda) \right], \\ \frac{1}{\delta_1} A_n^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} A_n^{(2)} = -\frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} \lambda \delta_j^{-1} \operatorname{sh} \pi \lambda D_j(\lambda) b_{2n+1}^{(j)}(\lambda) d\lambda + \bar{f}_n, \quad (18) \\ B_n^{(1)} + B_n^{(2)} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} \lambda \operatorname{sh} \pi \lambda D_j(\lambda) b_{2n}^{(j)}(\lambda) d\lambda + \bar{f}_n, \\ \bar{f}_0 = -\frac{\bar{a}}{a} \sigma_0, \bar{f}_n = 0 \quad (n=1,2,\dots). \end{aligned}$$

Полагая $A_n^{(1)} = \frac{\bar{a}\sigma_0\delta_1\delta_2}{a(\delta_1 - \delta_2)} x_n; B_n^{(1)} = \frac{\bar{a}\sigma_0\delta_1}{a(\delta_1 - \delta_2)} y_n$ и исключая в (18)

величины $A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, D_1(\lambda), D_2(\lambda)$, для нахождения x_n, y_n получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$\begin{aligned} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(11)} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk}^{(12)} y_k + f_n \quad (n=0,1,2,\dots), \\ y_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(21)} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk}^{(22)} y_k \quad (n=1,2,\dots), \quad (19) \end{aligned}$$

в которой

$$\begin{aligned}
 & f_0 = 1, f_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\
 & d_{nk}^{(11)} = (2k + 1)(-1)^{n+k} \frac{\delta_1 \delta_2}{(\delta_1 - \delta_2)^2} \times \\
 & \times \int_0^\infty \lambda t h \pi \lambda \left[c_{2n+1}^{(1)}(\lambda) - c_{2n+1}^{(2)}(\lambda) \right] \left[c_{2k+1}^{(1)}(\lambda) - c_{2k+1}^{(2)}(\lambda) \right] d\lambda, \\
 & d_{nk}^{(12)} = 2k(-1)^{n+k-1} \frac{1}{(\delta_1 - \delta_2)^2} \times \\
 & \times \int_0^\infty \lambda t h \pi \lambda \left[c_{2n+1}^{(1)}(\lambda) - c_{2n+1}^{(2)}(\lambda) \right] \left[\delta_1 c_{2k}^{(1)}(\lambda) - \delta_2 c_{2k}^{(2)}(\lambda) \right] d\lambda, \\
 & d_{nk}^{(21)} = (2k + 1)(-1)^{n+k-1} \frac{\delta_1 \delta_2}{(\delta_1 - \delta_2)^2} \times \\
 & \times \int_0^\infty \lambda t h \pi \lambda \left[\delta_1 c_{2n}^{(1)}(\lambda) - \delta_2 c_{2n}^{(2)}(\lambda) \right] \left[c_{2k+1}^{(1)}(\lambda) - c_{2k+1}^{(2)}(\lambda) \right] d\lambda, \\
 & d_{nk}^{(22)} = 2k(-1)^{n+k} \frac{1}{(\delta_1 - \delta_2)^2} \times \\
 & \times \int_0^\infty \lambda t h \pi \lambda \left[\delta_1 c_{2n}^{(1)}(\lambda) - \delta_2 c_{2n}^{(2)}(\lambda) \right] \left[\delta_1 c_{2k}^{(1)}(\lambda) - \delta_2 c_{2k}^{(2)}(\lambda) \right] d\lambda.
 \end{aligned}$$

Свойства бесконечной системы (19) и ее решений можно установить путем оценки величин

$$\begin{aligned}
 s_{m,l}^{(rs)} &= \int_0^\infty c_m^{(r)}(\lambda) c_l^{(s)}(\lambda) \lambda t h \pi \lambda d\lambda = \\
 &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \mu^{-1} J_m(\bar{a} \mu) d\mu \int_0^\infty \omega^{-1} J_l(\bar{a} \omega) d\omega \int_0^\infty \lambda t h \pi \lambda K_{i\lambda}(\delta_r a \mu) K_{i\lambda}(\delta_s a \omega) d\lambda,
 \end{aligned}$$

которые с учетом интеграла [5]

$$\int_0^\infty x t h \pi x K_{ix}(b) K_{ix}(c) dx = \frac{\pi \sqrt{bc}}{2(b+c)} e^{-(b+c)}$$

и последующей замены $\omega = \mu t$ принимают вид

$$s_{m,l}^{(rs)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R_{m,l}^{(rs)}(t)}{\sqrt{t}(1+t)} dt, \quad R_{m,l}^{(rs)}(t) = \int_0^\infty \mu^{-1} J_m\left(\frac{\bar{a} \mu}{\delta_r}\right) J_l\left(\frac{\bar{a} \mu t}{\delta_s}\right) e^{-a \mu(1+t)} d\mu.$$

На основании неравенства Коши–Буняковского

$$\left| R_{m,l}^{(rs)} \right| = \left| \left(f_m^{(r)}, g_l^{(s)} \right) \right| \leq \left\| f_m^{(r)} \right\| \left\| g_l^{(s)} \right\| \text{ для функций } f_m^{(r)}(\mu) = \mu^{-\frac{1}{2}} J_m \left(\frac{\bar{a}\mu}{\delta_r} \right) e^{-a\mu},$$

$$g_l^{(s)}(\mu) = \mu^{-\frac{1}{2}} J_l \left(\frac{\bar{a}\mu t}{\delta_s} \right) e^{-a\mu t} \in L_2(0, \infty) \text{ и значений интегралов [5]}$$

$$J_\nu^2(bc) = \frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{J_{2\nu}(2cx)}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx \text{ при } b = \bar{a}, c = \frac{\mu}{\delta_r}, \frac{\mu t}{\delta_s}; \nu = m, l \quad (r, s = 1, 2; m, l = 1, 2, \dots);$$

$$\int_0^\infty \mu^{-1} e^{-p\mu} J_\nu(c\mu) d\mu = \nu^{-1} c^\nu \left(p + \sqrt{p^2 + c^2} \right)^{-\nu} \text{ при } c = \frac{2x}{\delta_r}, \frac{2xt}{\delta_s}; p = 2\bar{a}, 2\bar{a}t;$$

$\nu = 2m, 2l$ после некоторых преобразований получаем оценку

$$\left| s_{m,l}^{(rs)} \right| \leq \frac{\varepsilon_r^m \varepsilon_s^l}{\sqrt{ml}}, \left(0 < \varepsilon_j = \frac{\bar{a}}{\delta_j a + \sqrt{\delta_j^2 a^2 + \bar{a}^2}} < 1 \right). \quad (20)$$

Поскольку матричные коэффициенты системы (19) являются линейными комбинациями величин $s_{m,l}^{(rs)}$ ($r, s = 1, 2; m = 2n + 1, 2n; l = 2k + 1, 2k$), то при любых значениях $\varepsilon_j \in (0; 1)$ оценка (20) гарантирует выполнение неравенств

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty \left| d_{nk}^{(11)} \right|^2, \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^\infty \left| d_{nk}^{(12)} \right|^2, \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty \left| d_{nk}^{(21)} \right|^2, \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \left| d_{nk}^{(22)} \right|^2 < \infty.$$

Следовательно, почти при всех значениях $\varepsilon_j \in (0; 1)$ решение бесконечной системы (19) в гильбертовом пространстве числовых последовательностей l_2 существует, единственно и может быть найдено методом редукции [6].

В соответствии с оценкой (20) аналитическое решение системы (19) естественно строить путем разложения величин $s_{m,l}^{(rs)}, x_n, y_n$ в ряды по степеням безразмерных параметров $\varepsilon_r, \varepsilon_s$.

На основании интегрального представления функции Макдональда [5]

$$K_{i\lambda}(x) = \int_0^\infty e^{-xcht} \cos \lambda t dt \text{ при } x = \delta_j a \mu \text{ величины } c_k^{(j)}(\lambda) \text{ представим в виде}$$

$$c_k^{(j)}(\lambda) = \frac{2}{\pi k} \varepsilon_j^k T_k(\lambda, \varepsilon_j), T_k(\lambda, \varepsilon_j) = \int_0^\infty \left(\frac{\delta_j a + \sqrt{\delta_j^2 a^2 + \bar{a}^2}}{\delta_j a + \sqrt{\delta_j^2 a^2 + \gamma^2}} \right)^k \frac{\cos \lambda t}{ch^{kt}} dt \left(\gamma^2 = \frac{\bar{a}^2}{ch^2 t} \right).$$

Полагая также

$$T_k(\lambda, \varepsilon_j) = f_0^{(k)}(\lambda) + f_2^{(k)}(\lambda) \varepsilon_j^2 + f_4^{(k)}(\lambda) \varepsilon_j^4 + \dots \quad (k = m, l; j = r, s)$$

и используя значения интегралов [7]

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{ch^v x} dx = \frac{2^{v-2}}{\Gamma(v)} \Gamma\left(\frac{v}{2} + \frac{ib}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2} - \frac{ib}{2}\right) \quad (\Gamma(z) - \text{гамма-функция}),$$

$$\int_0^\infty \frac{cha x}{shc x} \sin bxdx = \frac{\pi}{2c} \frac{sh \frac{b\pi}{c}}{ch \frac{b\pi}{c} + \cos \frac{a\pi}{c}}, \quad \int_0^\infty x \frac{\sin bx}{chc x} dx = \frac{\pi}{2c} \frac{sh \frac{b\pi}{c}}{ch^2 \frac{b\pi}{c}},$$

получаем последовательно

$$f_0^{(1)}(\lambda) = \frac{\pi}{2ch \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad f_2^{(1)}(\lambda) = \frac{\pi(1-\lambda^2)}{4ch \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad f_4^{(1)}(\lambda) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{24}\lambda^4 \right) \frac{\pi}{ch \frac{\pi\lambda}{2}},$$

$$f_0^{(2)}(\lambda) = \frac{\pi\lambda}{2sh \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad f_2^{(2)}(\lambda) = \frac{\pi\lambda(2-\lambda^2)}{6sh \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad f_0^{(3)}(\lambda) = \frac{\pi(1+\lambda^2)}{4ch \frac{\pi\lambda}{2}},$$

$$f_2^{(3)}(\lambda) = \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{1}{16}\lambda^4 \right) \frac{\pi}{ch \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad f_0^{(4)}(\lambda) = \frac{\pi\lambda(4+\lambda^2)}{12sh \frac{\pi\lambda}{2}},$$

$$f_0^{(5)}(\lambda) = \frac{1}{48} (9 + 10\lambda^2 + \lambda^4) \frac{\pi}{ch \frac{\pi\lambda}{2}};$$

$$s_{1,1}^{(rs)} = \frac{1}{4} \varepsilon_r \varepsilon_s \left[1 + \frac{1}{16} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_s^2) - \frac{11}{64} (\varepsilon_r^4 + \varepsilon_s^4) + \frac{19}{64} \varepsilon_r^2 \varepsilon_s^2 + \dots \right], \quad s_{2,1}^{(rs)} = \frac{1}{8} \varepsilon_r^2 \varepsilon_s + \dots,$$

$$s_{3,1}^{(rs)} = \frac{5}{64} \varepsilon_r^3 \varepsilon_s \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon_r^2 - 2\varepsilon_s^2 + \dots \right), \quad s_{4,1}^{(rs)} = -\frac{7}{32} \varepsilon_r^4 \varepsilon_s + \dots, \quad s_{5,1}^{(rs)} = -\frac{21}{512} \varepsilon_r^5 \varepsilon_s + \dots,$$

$$s_{1,2}^{(rs)} = s_{2,1}^{(rs)}, \quad s_{1,3}^{(rs)} = s_{3,1}^{(rs)}, \quad s_{1,4}^{(rs)} = s_{4,1}^{(rs)}, \quad s_{1,5}^{(rs)} = s_{5,1}^{(rs)}, \quad \dots \quad (r, s = 1, 2).$$

Решая теперь систему (19) и ограничиваясь при этом слагаемыми до порядка $O(\varepsilon_1^m \varepsilon_2^n)$ ($m+n=4$), находим

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1 + \frac{1}{4} \omega_{12} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \frac{1}{16} \omega_{12}^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^4 + \frac{1}{32} \omega_{12} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_2^3), \\
 x_1 &= -\frac{5}{64} \omega_{12} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_2^3), \quad y_1 = \frac{1}{8} \omega_{12} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\delta_1 \varepsilon_1^2 - \delta_2 \varepsilon_2^2); \quad (21) \\
 \omega_{12} &= \frac{\delta_1 \delta_2}{(\delta_1 - \delta_2)^2}.
 \end{aligned}$$

Существенно, что коэффициенты интенсивности нормальных напряжений $\bar{K}_I = \lim_{x \rightarrow \bar{a}} [\sigma_y \sqrt{2(x - \bar{a})}]_{|\bar{\theta}=0}$, $K_I = \lim_{y \rightarrow a} [\sigma_x \sqrt{2(a - y)}]_{|\xi=0}$ выражаются непосредственно через решение бесконечной системы (19):

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_I &= \sigma_0 \sqrt{\bar{a}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x_n; \\
 K_I &= \frac{\sigma_0}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\bar{a}}{\sqrt{a}} \left[\delta_1 \delta_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) p_n x_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n q_n y_n \right], \\
 p_n &= \int_0^{\infty} \lambda \operatorname{th} \pi \lambda \left[c_{2n+1}^{(1)}(\lambda) - c_{2n+1}^{(2)}(\lambda) \right] d\lambda, \quad q_n = \int_0^{\infty} \lambda \operatorname{th} \pi \lambda \left[c_{2n}^{(1)}(\lambda) - c_{2n}^{(2)}(\lambda) \right] d\lambda.
 \end{aligned}$$

Соответствующие решению (21) асимптотические формулы для \bar{K}_I, K_I имеют вид

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_I &= \sigma_0 \sqrt{\bar{a}} \left[1 + \frac{1}{4} \omega_{12} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \frac{1}{16} \omega_{12}^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^4 - \frac{13}{64} \omega_{12} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_2^3) \right] + \\
 &\quad + O(\varepsilon_1^m \varepsilon_2^n) \quad (m+n=6), \\
 K_I &= \frac{\sigma_0 \delta_1 \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\bar{a}}{\sqrt{2a}} \left[\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{7}{8} (\varepsilon_1^3 - \varepsilon_2^3) + \frac{1}{4} \omega_{12} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^3 \right] + O(\varepsilon_1^m \varepsilon_2^n) \\
 &\quad (m+n=5).
 \end{aligned}$$

В заключение отметим, что структура матричных коэффициентов разрешающей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и ее свойства остаются неизменными при любом допустимом способе нагружения берегов разрезов.

Список литературы

1. Соловьев, А. И. Краевые задачи теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и параболической систем координат [Текст] / А. И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 2(70). – Х., 2012. – С. 117–127.
2. Соловьев, А. И. О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин [Текст] / А. И. Соловьев, А. В. Головченко // Открытые информационные и

компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 101–110.

3. Соловьев, А. И. Равновесие ортотропной пластины, ослабленной двумя параллельными разрезами [Текст] / А. И. Соловьев, А. В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 63. – Х., 2014. – С. 115–126.

4. Проценко, В. С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В. С. Проценко, А. И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 973 – 982.

5. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

6. Канторович, Л. В. Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

7. Прудников, А. П. Интегралы и ряды [Текст] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

Поступила в редакцию 11.03.15

Крайові задачі теорії пружності для ортотропної пластини, ослабленої взаємно перпендикулярними розрізами

Запропоновано аналітичний метод дослідження симетричних крайових задач теорії пружності для тонкої ортотропної пластини з двома розрізами на різних осях анізотропії. За допомогою співвідношень між базисними гармонічними функціями у різних еліптичних системах координат отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь другого роду з матричними коефіцієнтами, які швидко зменшуються. Це дозволило провести ефективний аналіз напружено-деформованого стану в околі розрізів, зокрема отримати прості асимптотичні формули для коефіцієнтів інтенсивності нормальних напружень.

Ключові слова: ортотропна пластина, розріз, гармонічна функція.

Equilibrium of orthotropic plate weakened by two finite parallel sections

Analytical method of solving the boundary-value problems of theory of elasticity for thin orthotropic plate with two finite sections on the perpendicular axes of anisotropy is suggested. It is based on applying the ratio between basis harmonic functions in different elliptic coordinate systems and leads to infinite systems of linear algebraic equations of the second kind with quickly decreasing matrix coefficients. That allows to carry out an effective analysis of deflected mode near sections and derive simple asymptotic formulae for the normal stress intensity factors in particular.

Keywords: orthotropic plate, section, harmonic function.