Є.О. СЕВОСТЬЯНОВ

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ГЕОМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ

Наукове повідомлення молодого вченого на засіданні Президії НАН України 15 лютого 2012 року

Повідомлення присвячено вивченню властивостей просторових відображень із необмеженою характеристикою квазіконформності, зокрема, так званих відображень із скінченним спотворенням, які активно вивчаються протягом останніх 10–15 років у роботах багатьох відомих математиків. Доведено низку властивостей так званих Q-відображень, які є підвидом відображень зі скінченним спотворенням і включають відображення з обмеженим спотворенням за Решетняком. Так, для Q-відображень доведено теореми про диференційованість майже всюди, належність до класу ACL та аналоги теорем типу Сохоцького — Вейєрштрасса і Ліувілля.

Добре відомо, що геометричний метод дослідження відображень, а саме метод модулів та ємностей, є одним із основних підходів до вивчення квазіконформних відображень і відображень з обмеженим і скінченним спотворенням. Зауважимо, що сьогодні здебільшого для всіх відомих класів просторових відображень установлено певні оцінки спотворення модуля сімей кривих, а також оцінки спотворення ємностей конденсаторів за відображенням.

Вивчення квазіконформних відображень і відображень з обмеженим спотворенням було розпочато в працях М.О. Лаврентьєва [1], Ю.Г. Решетняка [2], О. Мартіо, С. Рікмана, Ю. Вяйсяля [3], Є.О. Полецького [4], Ф. Герінга [5] та багатьох інших. Окремо зазначемо дослідження Г.Д. Суворова [6] і В.Я. Гутлянського [7], які заснували в Україні відповідні школи з теорії відображень.

Важливим етапом вивчення відкритих дискретних Q-відображень, про які йтиметься нижче, є монографія О. Мартіо, В.І. Рязанова, У. Сребро та Е. Якубова [8]. Головну увагу в ній приділено гомеоморфізмам, що відрізняє зазначені вище дослідження від досліджень автора. Ми не вважаємо відображення ін'єктивними, вони можуть мати точки розгалуження. Наведемо деякі розрахунки.

Всюди за текстом D — область в R^n, $n \geq 2$, m — міра Лебега в R^n; $f : D \to R^n$ передбачає, що відображення $f = (f_1(x),...,f_n(x))$, $x = (x_1,...,x_n) \in D$, задане в D, є неперервним. Нехай $B(x_0, r) = \{x \in R^n : |x - x_0| < r\}$, $B^n := B(0, 1)$. Надалі Ω_n позначає об'єм одиничної кулі B^n у R^n, $f'(x)$ — матриця Якобі відображення f у точці x, $J(x, f)$ — якобіан відображення f у точці x, $J(x, f) := \det f'(x)$, $dist(A, B)$ — відстань між множинами A і B у R^n, $m(A)$ — міра Лебега множини A у R^n, $\overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$. Відображення $f : D \to R^n$ зветься *відкритим*, якщо образ $f(U)$ кожної відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в R^n, і *дискретним*, якщо прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in R^n$ складається тільки з ізольованих точок. Під *сім'єю* Γ *кривих* γ розумітимемо довільний набір кривих; $f(\Gamma) = \{\gamma' = f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Нагадаємо, що борелева функція $\rho : R^n \to [0, \infty]$ зветься *допустимою* для сім'ї кривих Γ в R^n; записуємо $\rho \in adm\,\Gamma$, якщо криволінійний інтеграл першого роду $\int_\gamma \rho(x)\,|dx|$ по кривій γ задовольняє умову

$\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geqslant 1$ для всіх (локально спрямованих) кривих $\gamma \in \Gamma$. *Модулем* сім'ї кривих Γ в R^n зветься величина $M(\Gamma) = \inf\limits_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_\gamma \rho^n(x)\, dm(x)$.

Нехай $Q: D \to [1, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Відображення $f: D \to \overline{R^n}$ зветься Q-*відображенням*, якщо нерівність

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x).$$

виконано для довільної сім'ї кривих Γ в області D і для довільної функції $\rho \in adm\, \Gamma$. Відображення $f: D \to R^n$, $n \geq 2$, зветься *абсолютно неперервним на лініях*, записуємо $f \in ACL$, якщо в довільному n-мірному паралелепіпеді P з ребрами, паралельними осям координат, і такому, що $\overline{P} \subset D$, усі координатні функції $f = (f_1,...,f_n)$ абсолютно неперервні на майже всіх прямих, паралельних осям координат. Тут і надалі $\| f'(x) \|$ — матрична норма $f'(x)$, $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1} |f'(x)\, h|$. Зауважимо, що *зовнішня дилатація* відображення f у точці x є величина

$$K_0(x,f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|},$$

якщо $J(x, f) \neq 0$, 1, якщо $f'(x) = 0$ і ∞ в інших випадках. *Внутрішня дилатація* відображення f у точці x є величина

$$K_1(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l^n(f'(x))},$$

якщо $J(x, f) \neq 0$, 1, якщо $f'(x) = 0$ і ∞ в інших випадках.

Наступні результати було опубліковано в роботах [9, 10].

Теорема 1. *Нехай $f: D \to \overline{R^n}$ відкрите дискретне Q-відображення з $Q \in L^1_{loc}(D)$. Тоді:*

1) f диференційовне майже всюди в D;

2) f належить до класу ACL у D;

3) за деякої сталої $C_n > 0$, що залежить тільки від розмірності простору n, і майже всіх $x \in D$ виконано нерівності $K_0(x, f) \leq C_n \cdot Q^{n-1}(x)$ і $K_1(x, f) \leq Q(x)$.

Нехай область D у R^n, $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x^0\} \to \overline{R^n}$ відображення, задане в області $D \setminus \{x_0\}$. Точка $x_0 \in D$ зветься *усувною* для відображення f, якщо відома скінченна границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то точка x_0 — *полюс*. Точка $x_0 \in D$ зветься *істотно особливою*, якщо не існує ані скінченного, ані нескінченного $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Вважають, що локально інтегровна функція $\varphi: D \to R$ має скінченне середнє коливання в точці $x_0 \in D$, скорочено $\varphi \in FMO(x_0)$, якщо

$$\limsup_{r\to 0} = \frac{1}{m(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty,$$

де $m(B(x_0, \varepsilon)) = \Omega_n \varepsilon^n$ — міра Лебега кулі $B(x_0, \varepsilon)$ і

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{m(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$$

середнє інтегральне значення функції φ над кулею $B(x_0, \varepsilon)$. Функції скінченного середнього коливання було введено А. Ігнатьєвим і В. Рязановим у 2002 р. [11]. Наступна теорема узагальнює відомий класичний результат із комплексного аналізу [12].

Теорема 2 (аналог теореми Сохоцького–Вейєрштрасса). *Нехай $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \to \overline{R^n}$ — відкрите дискретне Q-відображення і x_0 є істотно особливою для f. Припустимо, що $Q \in FMO(x_0)$. Тоді для будь-якого $A \in \overline{R^n}$ знайдеться послідовність $x_k \in D$ така, що $x_k \to x_0$ і $f(x_k) \to A$ при $k \to \infty$.*

Вважатимемо, що функція $Q \in FMO(\infty)$, якщо для функції $\tilde{Q}(x) := Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ маємо $Q \in FMO(\infty)$ у точці $x_0 = 0$. Таким чином, умова $\varphi \in FMO(\infty)$ має наступний вигляд:

$$\varphi \in FMO(\infty) \Leftrightarrow \int\limits_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right)$$

при $R \to \infty$, де $\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \int\limits_{|x|>R} \varphi(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}$.

Теорема 3 (аналог теореми Ліувілля). *Нехай $Q: R^n \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція, $f: R^n \to \overline{R^n}$ — відкрите дискретне Q-відображення. Припустимо, що функція $Q(x)$ задовольняє умову:*

$$\int\limits_{|x|>R} |Q(x) - Q_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right)$$

при $R \to \infty$, де

$$Q_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \int\limits_{|x|>R} Q(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}.$$

Тоді f не може відображати весь простір R^n на обмежену область [12].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лаврентьев М.А.* Основная задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Математический сборник. — 1947. — Т. 21(63), № 2. — С. 285–320.
2. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982. — 285 с.
3. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 1969. — V. 448. — P. 1–40.
4. *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконфомных отображений // Математический сборник. — 1970. — Т. 83(125), № 2(10). — С. 261–272.
5. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — V. 103. — P. 353–393.
6. *Суворов Г.Д.* Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле. — К.: Наукова думка, 1981. — 168 с.
7. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. J. Math. and Math. Scie. — 2003. –V. 22. — P. 1397–1420.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. — New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. — 367 p.
9. *Salimov R.R., Sevostyanov E.A.* ACL and differentiability of the open discrete ring // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — V. 55, N 1–3. — P. 49–59.
10. *Севостьянов Е.А., Салимов Р.Р.* О внутренних дилатациях отображений с неограниченной характеристикой // Украинский математический вестник. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 129–143.
11. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Украинский математический вестник. — 2005. — Т. 2, № 3. — С. 395–417.
12. *Севостьянов Е.А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Известия АН России. Серия математическая. — 2010. — Т. 74, № 1. — С. 159–174.

Євген Олександрович СЕВОСТЬЯНОВ

Кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України (м. Донецьк).

У 2002 р. закінчив математичний факультет Донецького національного університету й вступив до аспірантури при Інституті прикладної математики НАН України. 2006 року захистив кандидатську дисертацію «До теорії збіжності просторових відображень зі скінченним спотворенням довжини» (науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор В.І. Рязанов). У 2011 р. отримав атестат старшого наукового співробітника.

Має державні та академічні премії і відзнаки: 2009 р. — грамота виконкому донецької міської ради, «за сумлінну працю, вагомі досягнення у професійній діяльності, особистий внесок у розвиток вітчизняної науки та з нагоди Дня Науки», 2010 р. — почесна грамота управління освіти і науки донецької облдержадміністрації, «за плідну науково-педагогічну діяльність, значні досягнення у фундаментальних і прикладних наукових дослідженнях, за вагомий особистий внесок у реалізацію державної політики в галузі національної освіти», 2010 р. — Премія Верховної Ради України «найталановитішим молодим ученим в галузі фундаментальних і прикладних досліджень та науково-технічних розробок» за 2009 рік, 2011 р. — Премія Кабінету Міністрів України «За особливі досягнення молоді у розбудові України». Стипендіат НАН України для молодих учених (2008–2010 рр.), стипендіат Президента України для молодих учених (з жовтня 2011 р.).

У лютому 2012 р. подав до розгляду докторську дисертацію «Дослідження просторових відображень геометричним методом» до Вченої ради Д 26.206.01 при Інституті математики НАН України (м. Київ).

Є автором 34 наукових статей у вітчизняних та зарубіжних періодичних виданнях. Коло наукових інтересів — геометрична теорія функцій та комплексний аналіз, дослідження відображень із розгалуженням, рівняння Бельтрамі.