

**ГЕОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗШИРЕННЯ ТА ЗАТУХАННЯ
ВІЛЬНИХ ПЛОСКИХ СТРУМИН**

У вентиляованих приміщеннях використовуються турбулентні струминні течії: вільні, обмежені, напівобмежені (які насталяються на поверхні різної форми), такі, що взаємодіють, тощо. Одним з факторів, що визначає рівномірність розподілення повітря у приміщенні, є розширення струмин. Його прийнято розглядати як результат дії турбулентних пульсацій у струминному примежовому шарі та у навколишньому середовищі (при розвитку струмини в потоку). У такому контексті при теоретичному описі розширення струмини обов'язково використовуються дослідні коефіцієнти. Це призводить до потреби у складних експериментальних дослідженнях, що знижує ефективність праці науковців та підвищує собівартість обладнання.

На відміну від цих підходів професор кафедри теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури А.Я.Ткачук [1] розробив теорію турбулентних примежових шарів за методом особливостей. Потік розглядається як течія ідеальної рідини, в якій присутні як «особливості» дрібні вихрові течії. Такий підхід дозволив безпосередньо описувати дію вихорів замість використання додаткових понять.

Продовженням цих досліджень є підхід до аналітичного опису струминних течій, що передбачає розгляд струминного примежового шару як сукупність великомасштабних вихорів – клубів.

У вільних струминах [2,3,4] показана можливість подання струминного шару (рис.1) у вигляді клубів, що котяться вільною межею. Лінія, яка сполучає центри клубів, практично збігається з характерною лінією за Грімтіліним, де швидкість дорівнює половині осьової. У роботі [3] вільну струмину подано у вигляді клубів у шаховому порядку.

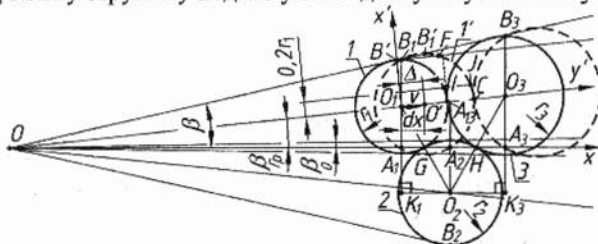


Рис.1. Схема струмини

Отримано зв'язок між тангенсом кута розширення струмини $\text{tg}(\beta) = \Theta$, тангенсом кута $\text{tg}(\beta_{Гр}) = \Theta_{Гр}$ лінії, де швидкість u дорівнює половині осьової u_m , та тангенсом кута межі занурення клубів у сусідній шар $\text{tg}(\beta_0) = \Theta_0$. Цей зв'язок з похибкою до 0,32% описується формулою:

$$\Theta_{Гр} = (0,49482 - 0,02947 \exp(-0,0611\Theta^2))\Theta, \quad (1)$$

або для $\Theta < 1$

$$\Theta_{Гр} = 0,4655 \Theta. \quad (2)$$

Також отримані співвідношення між радіусами та абсцисами x_1, x_2, x_3 центрів клубів O_1, O_2, O_3 :

$$r_i = x_i(\Theta - \Theta_{Гр}) = x_i(\Theta_{Гр} + \Theta_0), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Розглянемо джерело Толміна, яке витікає з нескінченно тонкої щілини у точці O . Виділимо клуби 1, 2 та 3 радіусами r_1, r_2, r_3 . Осі клубів позначимо O_1, O_2, O_3 . Проекції осей клубів на вісь струмини x позначимо, відповідно, A_1, A_2 та A_3 , а найбільш віддалені від осі x точки клубів – B_1, B_2 та B_3 . Клуб 1 рухається з поступальною швидкістю v на осі клубів O_1 . За час dt центр клубів O_1 зсунеться у точку O' на відстань вздовж осі струмини x $dx_1 = vdt$. Також з урахуванням зростання радіуса клубів на величину dr_1 центр віддаляється від осі струмини. Клуб 1 займе положення $1'$. У криволінійному трикутнику $B_1A_{13}B_3$ відбувається лише підтікання повітря до струмини у напрямку, перпендикулярному до осі x [4]. А це можливе лише якщо як мінімум все повітря криволінійної фігури $B_1B'_1CA_{13}$ (B'_1 – найбільш віддалена від осі x точка кола $1'$, B'_1C – відрізок прямої) буде спожито струминою. Якщо спожито менше, то клуб 1 буде або створювати рух повітря в напрямку осі x , або виштовхувати його зі струмини, що суперечить фізичному змісту задачі.

У околиці точки A_{13} відбувається звуження потоку, що підтікає до криволінійного трикутника $A_{13}GH$. У даному місці має суттєво зрости швидкість у напрямку до осі x . Рух на периферії клубів відбувається проти напрямку підтікання. Тому ежекція в цій околиці ускладнена. Це – околиця ускладненого підтікання $IICA_{13}$. Оскільки ширина міжклубного шару тут незначна, то наявність повздовжньої складової швидкості не вплине на усереднену швидкість. Тому слід вилучити з розгляду частину фігури $B_1B'_1CA_{13}$ біля точки A_{13} , в якій ширина міжклубного шару незначна.

Площа A_c розглянутої фігури $B_1B'_1CA_{13}$ визначається з урахуванням багатьох факторів. Але якщо $dt \rightarrow 0$, то площа A_c стає теж нескінченно малою, як і приріст радіуса dr_1 . Введемо систему декартових координат $x'y'$ з центром у точці O_1 , а вісь y' містить точки O_1 та O' та знаходиться під кутом $\beta_{Гр}$ до осі струмини x . Якщо клуб збільшує радіус r_1 лінійно відносно x , то нескінченно малі величини dr_1 та dx_1 мають один порядок малості, як і довжина $\Delta = dx_1/\cos(\beta_{Гр})$ відрізка OO' . Існує можливість вилучити малі частини цієї площі вищого порядку малості і знайти

похідну dA_c/dx . Криволінійний трикутник $B_1B_1'F$ (B_1B_1' – відрізок прямої, $B_1'F$ – дуга, $AF|y'$) при стягуванні в точку прямує до звичайного трикутника, а площа його прямує до половини добутку довжини відрізка B_1F та висоти, опущеної з точки B_1' . Оскільки обидві величини мають порядок малості не вищий за dx_1 , то їхній добуток має вищий порядок малості і може бути вилучений з розгляду. Вилучимо з розгляду мікроскопічну фігуру, яка на рис.1 зливається з відрізком B_1B_1' (B_1' – точка перетину осі x' та межі клуба 1). Тоді площа A_c буде замінена площею A_0 фігури $BFC A_{13}$.

Тепер вилучимо околицю ускладненого підтікання біля точки A_{13} . Рівняння кола $y' = (r_1^2 - x'^2)^{1/2}$ при $x' = 0,2r_1$ дає значення відстані між дотичною (на рис.1 показана коротким пунктиром) та колом $r_1 - y' = 0,02r_1$, рівне 2% від радіуса r_1 . Ця відстань незначна, а $x' = 0,2$ можна використати як оціночне значення межі околиці ускладненої ежекції. Площа криволінійної фігури BFI після вилучення околиці ускладненого підтікання IJA_{13} :

$$dA_0 \rightarrow \int_{0,2r_1}^{\eta} \Delta + \sqrt{(r_1 + dr_1)^2 - x'^2} dx' - \int_{0,2r_1}^{r_1} \sqrt{r^2 - x'^2} dx' \quad (4)$$

Після взяття інтегралів та спрощення сум скінченних і нескінченно малих величин:

$$dA_c \rightarrow dA_0 = 0,8\Delta \cdot r_1 = 0,8 r_1 dx_1 / \cos(\beta_{I_p}) = 0,8 r_1 dx_1 / K_{I_p} \quad (5)$$

де $K_{I_p} = \cos(\beta_{I_p})$. Для вільної струмнини при $\Theta_{I_p} = \text{tg}(\beta_{I_p}) \leq 0,3287$ маємо $K_{I_p} \geq 0,95$, тобто знаменник можна вважати одиницею з похибкою до 5%.

Спожите повітря йде на зростання площі A_k клуба 1:

$$dA_k = 2\pi r_1 dr_1, \quad (6)$$

та зростання площі $A_{k,m}$ криволінійного трикутника $A_{13}GH$:

$$dA_c = dA_k + dA_{k,m}, \quad (7)$$

Площа криволінійного трикутника $A_{13}GH$ є різницею площі A_{Δ} трикутника $O_1O_2O_3$ та площі $A_{сек}$ секторів клубів 1, 2 та 3, обмежених цим трикутником.

Площа трикутника $O_1O_2O_3$ зі сторонами завдовжки $r_1 + r_2$, $r_2 + r_3$ та $r_1 + r_3$ за формулою Герона після перетворень:

$$A_{\Delta} = ((r_1 + r_2 + r_3)r_1 r_2 r_3)^{1/2}, \quad (8)$$

Кути трикутника за теоремою косинусів:

$$\angle O_i O_j O_k = \arccos \left(1 - \frac{2r_i r_k}{(r_i + r_j)(r_j + r_k)} \right), \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k \quad (9)$$

За відомими кутами (9) та за рівнянням (8) площа криволінійного трикутника $O_1O_2O_3$:

$$A_{к.м.} = A_{\Delta} - A_{сек} = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1r_2r_3} - \frac{r_1^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{2r_2r_3}{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)}\right) - \frac{r_2^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{2r_1r_3}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)}\right) - \frac{r_3^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{2r_1r_2}{(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}\right) \quad (10)$$

Виразимо радіуси клубів r_1 , r_2 та r_3 . Довжина проекції відрізка A_1A_3 на вісь x :

$$x_3 - x_1 = (r_1 + r_3)\cos(\beta_{fp}) = (r_1 + r_3) / (1 + \Theta^2_{fp})^{1/2}; \quad (11)$$

З точки O_2 проводимо лінію, паралельну осі x . Продовжуємо перпендикуляри O_1A_1 та O_3A_3 до перетину з отриманою лінією і маємо точки, відповідно, K_1 та K_3 . Таким чином отримано прямокутні трикутники $O_1K_1O_2$ та $O_2K_3O_3$. Знайдемо з них зв'язок, якого не вистачає для замикання рівнянь (3) і (11). З трикутників OO_iA_i , $i = 1, 2, 3$ маємо довжини відрізків $|O_iA_i| = x_i\Theta_{fp}$. Оскільки відрізки K_1A_1 та O_2A_2 рівні, то довжина відрізка K_1O_1 становить $|K_1O_1| = |O_1A_1| + |O_2A_2| = (x_1 + x_2)\Theta_{fp}$. Аналогічно довжина відрізка K_3O_3 : $|K_3O_3| = |O_3A_3| + |O_2A_2| = (x_2 + x_3)\Theta_{fp}$. Довжини відрізків $|K_1O_2| = x_2 - x_1$, $|O_2K_3| = x_3 - x_2$, $|O_1O_2| = r_1 + r_2$, $|O_2O_3| = r_2 + r_3$. Теорема Піфагора для прямокутних трикутників $O_1K_1O_2$ та $O_2K_3O_3$:

$$(r_1 + r_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_1 + x_2)^2\Theta_{fp}^2; \quad (12)$$

$$(r_2 + r_3)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2\Theta_{fp}^2; \quad (13)$$

З рівнянь (3), (12) та (13) абсциси центрів клубів (а значить за залежністю (3) і їхні радіуси) утворюють геометричну прогресію:

$$x_2 = qx_1; \quad x_3 = qx_2 = q^2x_1, \quad (14)$$

де знаменник прогресії абсцис:

$$q = (1 + (\Theta\Theta_0)^{1/2}) / (1 - (\Theta\Theta_0)^{1/2}). \quad (15)$$

Підстановка рівнянь (14) і (15) до залежності (11) дає рівняння, розв'язок якого збігається з (1), (2). Це підтверджує правильність даних викладок. При $\Theta < 1$ за рівняннями (2) та (15):

$$1 \leq q = (1 + 0,069^{1/2}\Theta) / (1 - 0,069^{1/2}\Theta) \leq 1,7125. \quad (16)$$

У цих межах підрахунки за формулою (10) дозволяють замінити її більш простим наближенням:

$$A_{к.м.} = Kr_2^2 = Kq^2r_1^2; \quad 0,1418 \leq K \leq 0,1613. \quad (17)$$

Приймаємо $K = 0,1509$, при якому похибка формули (17) не перевищує 6,45%. Оскільки площа криволінійного трикутника не перевищує половину клуба, то похибка результату не перевищить 3,3%.

Приріст площі криволінійного трикутника за формулою (17) з урахуванням незначної зміни K при зміні r_1 :

$$dA_{к.м.} \approx 2Kq^2 r_1 dr_1. \quad (18)$$

Тоді за рівняннями (5), (6), (7), (3), (2) та (18) маємо:

$$0,8 \frac{r_1 dx_1}{K_{Гр}} = 0,8 \frac{r_1 dr_1}{(\Theta - \Theta_{Гр}) K_{Гр}} = 0,8 \frac{r_1 dr_1}{0,5345 \Theta K_{Гр}} = 2\pi r_1 dr_1 + 2Kq^2 r_1 dr_1,$$

$$\Theta = 0,8 / 0,5345 K_{Гр} (2\pi + 2Kq^2). \quad (19)$$

При $K_{Гр} = 1$ та $K = 0,1509$ це рівняння розв'язується чисельно. Маємо $\Theta = 0,2246$. Уточнюємо коефіцієнти та Θ :

$$K_{Гр} = \cos(\beta_{Гр}) = (1 + (0,4655\Theta)^2)^{-1/2} = 0,99458; K = 0,16023; \Theta = 0,22497.$$

Наступне наближення: $K_{Гр} = 0,99456$, $K = 0,16023$, $\Theta = 0,22498 \approx 0,22$. Наступне наближення повторює вищенаведене. Отримане значення повторює з точністю до другого знаку загальноприйняте [1, 5] $\Theta = 0,22$. Відмінність: $100 \cdot (0,22498 - 0,22) / 0,22 = 2,26\%$. Підставимо це значення до формули (2) і отримаємо $\Theta_{Гр} = 0,4655 \cdot 0,22498 = 0,1047 \approx 0,10$, що повторює дані [6] М.Й.Гримітліна ($\Theta_{Гр} \approx 0,1$) до другого знаку після коми. Отже, отримані дані свідчать про прийнятність висловлених припущень.

Перевіримо вплив криволінійного трикутника $A_{13}GH$. Якщо прийняти $K = 0$, то його споживання не буде враховано, а $\Theta = 0,23969 \approx 0,24$, що на 6,14% більше за вище отримане значення. Тобто вплив трикутника для грубих розрахунків (похибка до 10%) може не враховуватися.

Чим більше розширення струмини, тим швидше її затухання, більші витрати енергії на підживлення. Тому саме це мінімальне значення $\Theta \approx 0,22$ встановлюється при випуску струмини зі щілини. Отже, без залучення дослідних даних отримано одну з фундаментальних констант вільних струмин – тангенс кута розширення. З використанням закону збереження кількості руху, отримуємо темп затухання струмини. Цей аналіз не наведений, оскільки він добре висвітлений у літературних джерелах (наприклад, [5]) і у контексті даних викладок залишається без змін. У подальшому проведений аналіз буде розповсюджений на складні струмини, в т.ч., криволінійні напівобмежені.

Висновки

1. Висловлені припущення щодо мінімально можливого споживання навколишнього повітря струминою дозволили отримати кут

- розширення вільної струмини без використання експериментальних даних.
2. Незначна розбіжність між отриманими даними та даними відомих досліджень підтверджує висловлені гіпотези.

Список літератури:

1. Ткачук А.Я., Довгалюк В.Б. Аеродинаміка вентиляції: Навчальний посібник. – ІВНВКП «Укрґеліотех», 2009. – 376 с.
2. Мілейковський В.О. Геометричне моделювання плоских напівобмежених струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 86. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко. – К.:КНУБА, 2010 р. – 472с. – С.187-191.
3. Мілейковський В.О. Геометричне моделювання вільних ізотермічних струмин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 82. Відповідальний редактор В.Є.Михайленко. – К.:КНУБА, 2009 р.– 400с.
4. Мілейковський В.О. Геометричне обґрунтування профілю швидкості в струминних примежових шарах// Будівництво України. №1 2010 р.- С.17-20.
5. Галиев В.Н. Аеродинаміка вентиляції. Учеб. Пособие для вузов.- М.:Стройиздат. 1979.-295с.
6. Гримитлин М.И. Распределение воздуха в помещениях. – М.:Стройиздат, 1982. – 164 с., ил.

Надійшла до редакції 3.10.2012р.