ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТРОЛОГІЇ, ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

УДК 519.217.1

М.В. ПРИЙМАК, О.В. МАЦЮК, О.В. МАЄВСЬКИЙ
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ В УМОВАХ СТОХАСТИЧНОЇ ПЕРІОДИЧНОСТІ ТА МОЖЛИВОСТІ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

В статті розглянуто питання витоків та встановлення теорії масового обслуговування. Висвітлено актуальні напрямки дослідження систем масового обслуговування, характерною особливістю яких є стохастична періодичність. Для опису та дослідження таких систем, зокрема їх вхідних потоків, запропоновано використовувати моделі у вигляді періодичних шумів з певною функцією розподілу та відповідні методи їх статистичного налізу, прогнозу, імітаційного моделювання та оптимізації.

Ключові слова: система масового обслуговування, стохастична періодичність, періодичний шум, періодичний ланцюг Маркова, імітаційне моделювання.

M.V. PRYJMAK, O.V. MATSIUK, O.V. MAJEVSKIY
Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

QUEUINGSYSTEMS IN CONDITIONS OF STOCHASTIC PERIODICITYAND POSSIBILITIESOFTHEIRRESEARCH

Inthepaperthequestionsofissuesandformingof TheoryofQueuingSystems. Theactual directions of researches of Queuing Systems are lighted up with specialfeatureofstochasticperiodicity.Fordescriptionandinvestigationofsuchsystems,andtheir input streams particularly, the models like periodic noises with certain functionof distribution and corresponding methods of their statistical analysis, prognosis,simulationandoptimizationareoffered.

Key words: Queuing System, stochastic periodicity, periodicalnoise, periodicalMarcovChain,simulation.

Системи масового обслуговування та напрямки їх досліджень

Із системами масового обслуговування приходиться зустрічатися кожному і повсякчас. Це різні види транспортних систем, станції швидкої допомоги, Інтернет, парикмахерські, кафе, ресторани, навчальні заклади тощо.Основоположником досліджень СМО, в тому числі потоків, вважається датський вчений А.К. Ерланг (1878-1929), багатолітній співробітник Копенгагенської телефонної станції.Як зазначається в [1], задачі, розглянуті Ерлангом, були викликані до життя бажанням впорядкувати роботу телефонної мережі і розробити методи, які б дозволяли наперед розраховувати якість обслуговування замовлень (викликів, вимог). Основні дослідження Ерланга відносяться до 1908-1922 рр.

Інтерес до проблем, піднятих Ерлангом в області проектування і експлуатації телефонних станцій,з часом значно виріс. Виявилося, що задачі типу телефонних виникають в різних областях досліджень – в техніці, економіці, транспорті, організації виробництва.Проблемами СМО зацікавилися математики, економісти, інженери.Значний розвиток теорія СМО отримала в 30-50 рр. в роботах К.Пальма (Швеція), Ф. Плачека (Франція), В Феллєра (США), О.Я. Хінчина (СРСР). Сформованому напрямку досліджень СМО Хінчин запропонував назву «Теорія масового обслуговування» (ТМО), хоча в зарубіжній літературі (англійській) теорію масового обслуговування називають теорією черг. В останні роки все частіше зустрічається назва «теорія потоків» (ТП). Роботи з ТМО були продовжені Б.В. Гніденком, І.М. Коваленком, А.А. Боровковим.

В останні роки інтерес до ТМО неухильно зростає, про це свідчать наведені в [2] такі статистичні дані. Наукові роботи, в яких одночасно зустрічаються слова «черга», «випадковість», складають в світі:

- серед математичних статей за 1980-1995 роки – 13 відсотків;
- серед дисертацій за 1980-1995 рр. – 24 відсотки;
- серед робіт, опублікованих в наукових і інженерних журналах і збірниках в області фізики, електроніки, обчислювальних методів і інформаційних технологій – 60відсотків (дані за індексом INSPEC, розробленому американським і німецьким товариством електронної інженерії).

Незважаючи на такий великий інтерес до систем масового обслуговування і значну увагу науковців щодо їх дослідження, ще ціла низка проблемних задач залишаються невирішеними або вирішеними частково. Ось деякі з них:стохастична періодичність систем масового обслуговування; причини її виникнення; моделі та методи дослідження стохастичної періодичності.

Мета роботи: розглянути нові моделі стохастично періодичних потоків та запропонувати концепцію їх дослідження методами імітаційного моделювання та статистичного аналізу.

Основні категорії моделей теорії масового обслуговування

При дослідженні СМО, зокрема потоків, зручно користуватися підходом, суть якого вкладається в тріаду **«модель-алгоритм-програма»**. На першому етапі будується модель досліджуваного об'єкта; на другому – на базі моделі розробляються алгоритми, методи її досліджень, аналізу; на третьому етапі створюється відповідне програмне забезпечення, яке дозволятиме впровадити алгоритми в «життя», отримати конкретні результати щодо об'єкта в цілому чи його складових.

Сукупність моделей, що використовуються в ТМО, умовно розподіляють на дві категорії –**моделі вхідного потоку** замовлень, що надходить в СМО для обслуговування, і моделі, що описують систему обслуговування, **процес обслуговування**.В свою чергу моделі системи обслуговування можна розділити на три групи. Перша група – це моделі, що описують «**витрати**» на обслуговування. Такими «витратами» може бути час (тривалість) обслуговування замовлень, затрати роботи, енергії чи певної кількості операцій. В більшості випадків показники витрат є час обслуговування.Другу групу складають моделі, що описують **правила** (дисципліну) обслуговування, у відповідності до яких задається порядок вибору замовлень із черги на обслуговування. В правилах обслуговування визначається також число каналів (ліній, пристроїв) обслуговування, число місць для очікування (максимальна довжина черги). Іноді в правила вносять максимальний інтервал часу перебування замовлень в системі обслуговування, час очікування на початок обслуговування. В третю групу моделей входять **показники** (критерії, характеристики) **якості** обслуговування та **ефективності** роботи системи в цілому.

Відзначимо, що етап побудови чи вдосконалення моделей СМО досить складний. Причина в тому, що системи функціонують в умовах впливу випадкових факторів, основними з яких є дві випадковості. Випадковими є моменти часу, в які надходять замовлення (або, що тотожно – інтервали часу між сусідніми замовленнями), чим зумовлюється випадковість вхідного потоку, та випадковий характер мають тривалості часу обслуговування замовлень. Чи не найважливішим об'єктом при дослідженні СМО є вхідний потік Це природно, оскільки від властивостей вхідного потоку суттєво залежить структура системи обслуговування, закономірності обслуговування замовлень тощо. Розглянемо моделі вхідних потоків, зокрема потоків, що мають стохастично періодичний характер.

Існуючі моделі вхідних потоків

Підходи до обґрунтування моделей потоків.Є два взаємопов'язаних підходи обґрунтування моделі вхідного потоку.Один із них полягає в тому, потік задається послідовністю моментів часу $t_0, t_1, t_2, ..., t_0 = 0$, в які надходять замовлення. При цьому моделлю потоку є випадковий процес $\xi(t)$, який визначає число вимог, що надійшли в СМО за проміжок часу $(0, t)$.

Найпростіший потік. Добре вивченим є так званий **найпростіший потік**, тобто потік, що задовольняє умовам стаціонарності, відсутності наслідків і ординарності [3]. Для найпростішого потоку ймовірність надходження k замовлень за час t визначається за формулою

$$P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^{\mathrm{k}}}{k!} e^{-kt}, \tag{1}$$

де λ – параметр потоку, який ще називають інтенсивністю потоку. Оскільки отриманий розподіл ймовірностей (1) носить назву закону Пуассона, говорять, що моделлю найпростішого потоку є **пуассонівський процес**. Зауважимо, що з однієї сторони процес Пуассона є частинним випадком процесу з незалежними приростами, з іншої – частинним випадком марківських процесів.

Вхідний потік може задаватися ще одним способом. Нехай $t_0, t_1, t_2, \ldots$,причому $t_0 = 0$,моменти часу надходження послідовних замовлень потоку, тоді різниці $t_i - t_{i-1} = \tau_i$ будуть інтервалами між $i-1$-м і i-м замовленням. Очевидно, що потік буде заданим, якщо будуть відомі або всі моменти часу t_i або інтервали τ_i. Оскільки $\tau_i, i = 1, 2, \ldots$, випадкові величини, то для визначення потоку потрібно задати закони розподілу цих величин. Показано [3,4], що коли потік найпростіший, то всі інтервали $\tau_i, i = 1, 2, \ldots$, однаково розподілені, причому закон розподілу є показниковим[1,3,4], тобто

$$F_i(x) = P(\tau_i < x) = 1 - e^{-\lambda x} \overset{df}{=} F(x). \tag{2}$$

Відповідно густина розподілу для найпростішого потоку

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \tag{3}$$

Потоки із змінними параметрами. Якщо потік без наслідків, ординарний, але умова стаціонарності вже не виконується, то в моделі потоку такі випадки можна врахувати, припускаючи, що параметр потоку λ змінюється, тобто є деякою функцією $\lambda(t)$. Якщо ж потік є стохастично періодичним з деяким періодом $T > 0$, що спостерігається для більшості СМО, то для врахування цієї характеристики потоку вважають[1,3-5], що параметр потоку $\lambda(t)$ є періодичною функцією з цим же періодом T:

$$\lambda(t) = \lambda(t + T), t \geq 0. \tag{4}$$

Більш широкі можливості для врахування в моделі потоку його характерних особливостей надає підхід, коли потік описується за допомогою послідовності інтервалів $\tau_i, i = 1, 2, \ldots$, між сусідніми замовленнями. Використання такогопідходу дозволило виділити різноманітні класи потоків[3,4]. Звернемо увагу лише на два таких класи.

Потоки з обмеженими наслідками, коли всі інтервали $\tau_i, i = 1, 2, \ldots$, є незалежними випадковими величинами і задаються послідовністю відповідних функцій розподілів $F_i(x), i = 1,2,...$, $F_i(x) \equiv 0, x < 0$.

Рекурентні потоки, коли всі інтервали $\tau_i, i = 1,2,...$, розподілені за одним і тим же закон розподілу, тобто $F_i(x) = F(x), i = 1,2,...$, і утворюють по суті стаціонарну послідовність.

Перспективні напрямки досліджень СМО

Як зазначалося вище, інтерес до СМО не спадає. Значну увагу привертають газотранспортні та електроенергетичні системи, глобальна мережа Інтернет, регіональніта локальні інформаційних мереж тощо. Однак при проведенні їх досліджень, особливо на першому етапі – при обґрунтуванні моделей, зустрічаються випадки відсутності моделей, які б адекватно враховували стохастичну періодичність систем. Мало уваги приділяється різного типу **статистичним** задачам. Зауважимо також, що для багатьох задач, які стосуються оцінки якості обслуговування замовлень, оцінки ефективності роботи СМО в стаціонарному режимі, єдиним засобом їх розв’язку поки що залишається методи Монте-Карло (статистичного моделювання) [6]. Що стосується подібних задач для СМО, які функціонують в умовах стохастичної періодичності, то прикладів використання для їх розв’язку методів Монте-Карло взагалі не спостерігається.

Стохастично періодичні потоки із обмеженими наслідками

Єдиною відомою на даний час моделлю, яка дозволяє враховувати стохастичну періодичність вхідних потоків, є**періодичний пуассонівський процес** $\xi(t)$, параметр якого $\lambda(t)$ є періодичною функцією з деяким періодом $T : \lambda(t) = \lambda(t+T), t \geq 0$. Якщо розглядати такі ж потоки як послідовність інтервалів часу $\tau_i, i = 1,2,...$, між сусідніми замовленнями, то відповідно ці проміжки розподілені за показниковим розподілом, густина якого $f(x;t) = \lambda(t)e^{-\lambda(t)x}$ є періодичною функцією по аргументу t: $f(x;t) = \lambda(t)e^{-\lambda(t)x} = \lambda(t+T)e^{-\lambda(t+T)x} = f(x;t+T)$.

Однак попередній аналіз вхідних потоків деяких СМО (в наших дослідженнях це була центральна станція швидкої допомоги м. Тернополя), зафіксованих протягом тривалого часу (місяць і більше), висвітлює більш складну картину. Крім того, що для потоків явно проявляється стохастично періодичності з періодом $T = 24$ години, на окремих відрізках доби певної тривалості (в нашому випадку доба розбивалася на вісім відрізківдовжиною 3 години кожний) закони розподілу інтервалів часу $\tau_i, i = 1,2,...$, між сусідніми замовленнями часто є відмінними від показникового розподілу, більше того, ці закони можуть відрізнятися між собою. Як приклад, на рисунку 1 показані результати гістограмного аналізу проміжків часу між замовленнями, що надходили на диспетчерську службу центральної станції швидкої допомоги, причому гістограмний аналіз проводився окремо для восьми наступних інтервалів доби:[0,3) години.[3,6),[6,9).[9,12).[12,15).[15,18).[18,21).[21,24) години.

Результати гістограмного аналізу показують, що для вхідного потоку замовлень на швидку допомогу, які надходили на відрізках доби [0,3) години, [3,6), [6,9), [12,15), [15,18) годин,розподіл інтервалів часу між замовленнями можна вважати близьким до показникового. На відрізках часу [18,21),[21,24)визначення розподілівінтервалів часу вимагає додаткових досліджень. Оскільки для станції швидкої допомоги характерна стохастична періодичність її функціонування, розподіли проміжків часу між замовленнями періодично повторюється через добу, тобто через період $T = 24$ години.

Який же клас потоків утворюють потоки, подібні до тільки що розглянутих на прикладі потоку викликів на станцію швидкої допомоги? Які моделі при цьому можуть бути використані для опису таких потоків?Щодо першого запитання, то, очевидно, такого роду потоки утворюють клас **стохастично періодичних потоків з обмеженими наслідками.**

Моделі стохастично періодичних потоків із обмеженими наслідками

В роботах [5,7] та інших була визначена ціла низка класів періодичних випадкових процесів і послідовностей із різноманітними розподілами, Припускається, що вони можуть бути успішно використані як моделі стохастично періодичних потоків з обмеженими наслідками, коли розподіліпроміжків часу між замовленнями відмінні від показникового. Розпочнемо з деяких означень, в основі яких лежать процеси з незалежними приростами.

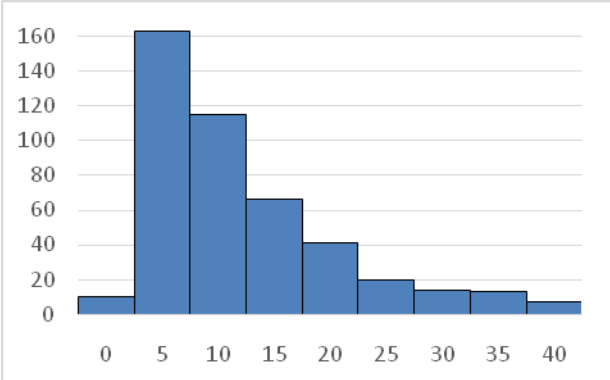
Періодичні випадкові процеси і шуми із неперервним аргументом.

Означення 1. Випадковий з незалежними приростами процес $\eta(t)$ називається процесом з незалежними періодичними приростами, якщо існує таке число $T > 0$, що при фіксованому $h > 0$ розподіли приростів $\Delta_h \eta(t) = \eta(t+h) - \eta(t)$ є періодичним по t з періодом T.

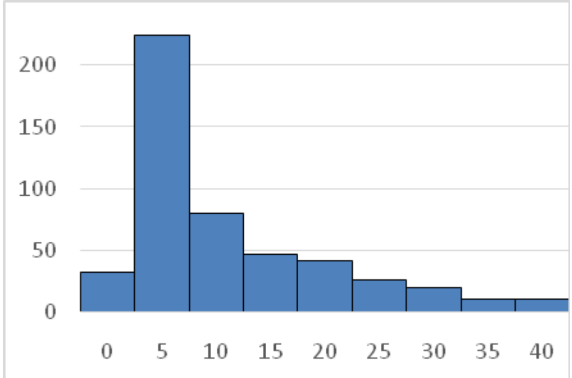
Означення 2. Періодичним шумом (у вузькому розумінні) називається узагальнена похідна від процесу з незалежними приростами.

Означення 3.Пуассонівським процесом з періодичними приростами називається процес з незалежними періодичними приростами, причому прирости мають розподіл Пуассона.

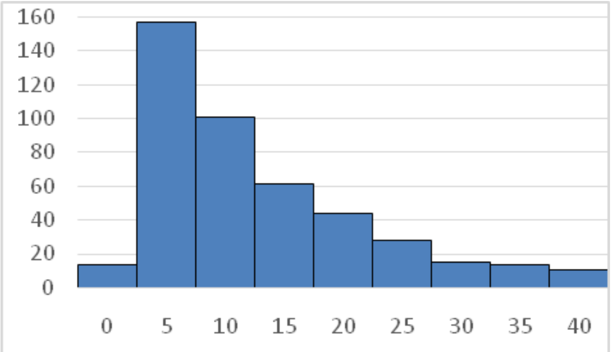
Означення 4. Пуассонівським періодичним шумом називається узагальнена похідна від пуассонівського процесу з періодичними приростами.



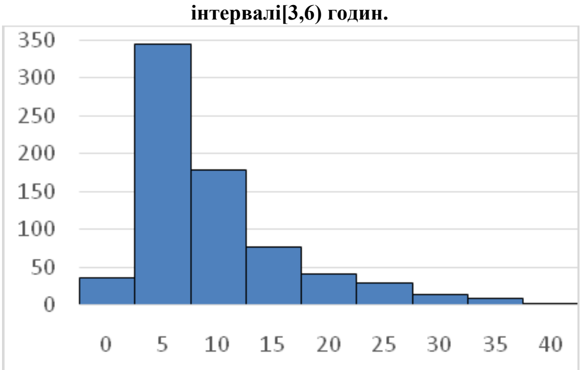
а) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі[0,3) годин.



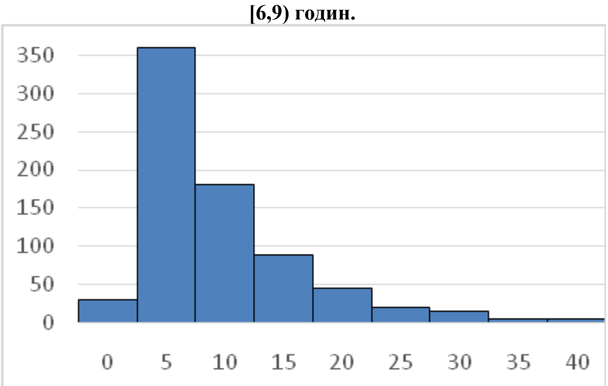
б) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі[3,6) годин.



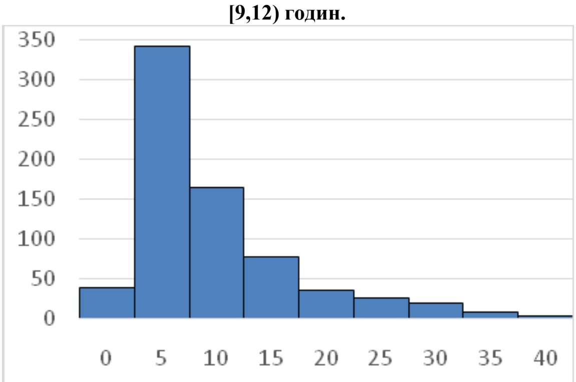
в) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі [6,9) годин.



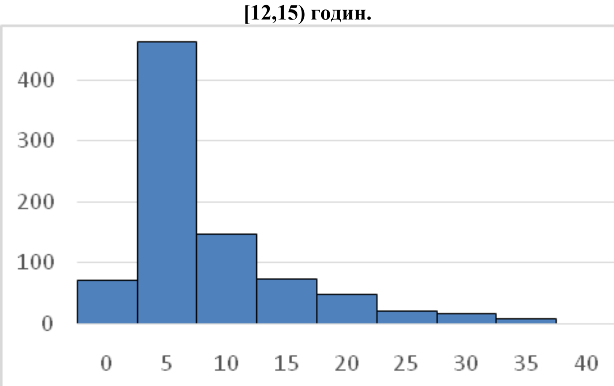
г) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі [9,12) годин.



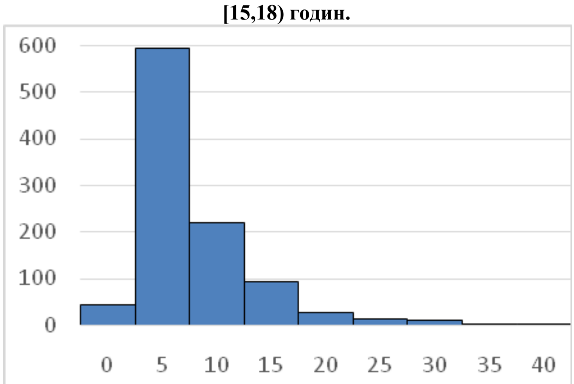
ґ) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі [12,15) годин.



д) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі [15,18) годин.



е) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі [18,21) годин.



є) Гістограма для проміжків часу, розміщених на інтервалі [21,24) годин.

Рис.1. Результати гістограмного аналізу інтервалівчасу між замовленнями на центральну станцію швидкої допомоги м. Тернополя, проведеного для наступних восьми інтервалів доби:[0,3),[3,6),[6,9),[9,12),[12,15),[15,18),[18,21),[21,24) годин.

Дискретні періодичні шуми

Щоб перейти до визначення дискретних періодичних шумів та їх класифікації нагадаємо означення дискретного шуму та дискретного періодичного шуму [5].

Означення 5. Дискретним шумом називається послідовність незалежних випадкових величин $\eta_i, i \in I$, де I – послідовність чисел $\ldots,-1,0,1,\ldots$ (іноді послідовність $0,1,2,\ldots$).

Іноді це визначення доповнюють, говорячи, що кожна із випадкових величин η_i має відповідну функцію розподілу $F_i\left(x\right)=P\left(\eta_i<x\right)$. Відзначимо також, що порівнюючи визначення дискретного шуму і визначення потоку в ТМО, зокрема потоку з обмеженими наслідками, видно, що ці визначення по сутті співпадають, відмінності тільки в термінології. Причина в тому, що багато термінів, які використовуються в ТМО, запозичено із телефонії (потік, канал, лінія, черга, відмова тощо) і вже давно використовуються як загальноприйняті.

Означення 6. Дискретний шум $\eta_i, i\in I$, називається періодичним дискретним шумом, якщо існує таке число $L>0,$ що його функція розподілу є періодичною з періодом $L,$ тобто

$$F_i\left(x\right)=F_{i+L}\left(x\right).$$

Наведене означення дискретного білого шуму є найбільш загальним, в ньому не конкретизується функція розподілу $F_i\left(x\right)$.Однак він є основою, щоб визначити конкретні класи дискретних періодичних шумів. Ми спочатку розглянемо випадки, коли розподілиє дискретними, пізніше – неперервними.

Означення 7. Дискретний періодичний шум $\eta_i, i\in I$, є**геометричним** періодичним шумом, якщо його випадкові величини η_i мають геометричний розподіл

$$P\left(\eta_i=k\right)=p_i\left(1-p_i\right)^k,$$

причому параметр p_i є періодичним з періодом $L>1$: $p_i=p_{i+L}$.

Означення 8. Дискретний періодичний шум $\eta_i, i\in I$, є **Пуассона** (пуасонівським) періодичним шумом, якщо випадкові величини η_i мають розподіл Пуассона

$$P\left(\eta_i=k\right)=\frac{\lambda_i^k}{k!}e^{-\lambda_j},$$

причому параметр λ_i є періодичним: $\lambda_i=\lambda_{i+L}$.

Перейдемо тепер до означень періодичних шумів, коли розподіли випадкових величин є неперервними.

Означення 9. Дискретний періодичний шум $\eta_i, i\in I$, є **рівномірним** періодичним шумом, якщо випадкові величини η_i рівномірно розподілені з густиною розподілу

$$f_i\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{b_i-a_i}, & x\in\left[a_i,b_i\right],\\ 0, & x\notin\left[a_i,b_i\right],\end{cases}$$

причому числа a_i та b_i утворюють періодичні послідовності з одним і тим же періодом $L: a_i=a_{i+L}, b_i=b_{i+L}$.

Означення 10. Дискретний періодичний шум $\eta_i, i\in I$, будемо називати **показниковим** періодичним шумом, якщо для його випадкових величин η_i густина розподілу

$$f_i\left(x\right)=\begin{cases}\lambda_i e^{-\lambda_j x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\ i\in I,\end{cases}$$

причому параметр λ_i змінюється періодично з періодом L: $\lambda_i=\lambda_{i+L}$.

Показниковий розподіл є неперервним аналогом геометричного розподілу, для нього має місце властивість відсутності наслідків:

$$P\left(\xi>x+t\mid\xi>t\right)=P\left(\xi>x\right),$$

в зв’язку з чим є основним в теорії стрибкоподібних марківських процесів.

Подібно до наведених вище означень 7-10можуть бути введені класи дискретні періодичні шуми з іншими розподілами. Більш повна їх класифікація наведена в таблиці 1.

Можливості статистичного аналізу та імітаційного моделювання стохастично періодичних СМО

Для періодичних випадкових послідовностей, в тому числі і для розглянутих вище періодичних шумів та отриманих на їх основі періодичних послідовностей ковзного середнього і авторегресії, розроблено методи їх статистичного аналізу [5]. Очевидно, періодичні шуми можуть бути використані при обґрунтуванні моделей стохастично періодичних потоків з обмеженими наслідками, а також як моделі тривалостей обслуговування замовлень. В [5] розроблені також методи імітаційного моделювання періодичних шумів, враховуючи при цьому конкретну функцію їх розподілу, та методи імітаційного моделювання періодичних послідовностей ковзного середнього і авторегресії. Очевидно, ці моделі, методи їх статистичного аналізу та імітаційного моделювання можуть бути використані в ТМО при обґрунтуванні та дослідженні стохастично періодичних потоків замовлень та тривалостей їх обслуговування, при їх дослідженні методами математичної статистики, при імітаційному моделюванні цих послідовностей, і нарешті, при моделюванні роботи стохастично періодичних СМО в цілому.

Таблиця 1

Дискретні періодичні шуми (п.ш.)		
Шуми з дискретними розподілами	Шуми з неперервними розподілами	
Бернулі п.ш.	рівномірний п.ш.	χ^2 п.ш.
біноміальний п.ш.	трикутний п.ш.	χ п.ш.
геометричний п.ш.	показниковий п.ш.	Стьюдента п.ш.
Пуассона п.ш.	нормальний п.ш.	F п.ш.
логарифмічний п.ш.	гама п.ш.	логістичний п.ш.
	бета п.ш.	логарифмічний п.ш.
	Коші п.ш.	Вейбула-Гніденко п.ш.

Література

1. Гнеденко Б.В. Беседы о теории массового обслуживания. – М.: Знание, 1973. – 64 с.
2. Фосс С.Г. Стохастические системы и сети обслуживания. – Новосибирский университет. – 14 с.
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
4. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее применение. – М.: Советское радио, 1965. – 510 с.
5. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. Дис…. докт. техн. Наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.
6. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
7. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип.10(86). – С.22-27.

References

1. Gnedenko B.V. Besedyi o teorii massovogo obsluzhivaniya. – M.: Znanie, 1973. – 64 p.
2. Foss S.G. Stohasticheskie sistemyi i seti obsluzhivaniya. – Novosibirskiy universitet. – 14 p.
3. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya. – M.: Nauka, 1987. – 336p.
4. Saati T. Elementyi teorii massovogo obsluzhivaniya i ee primenenie. – M.: Sovetskoe radio, 1965. – 510p.
5. Priymak M.V. Osnovi teorIYi modelyuvannya, analIzu I prognozu v avtomatizovanih sistemah upravlInnya ritmIchnimi protsesami: Avtoref. Dis…. dokt. tehn. Nauk: 05.13.06 / KiYiv: NAU, 2001. – 34 p.
6. Sobol I.M. Chislennyie metodyi Monte-Karlo. – M.: Nauka, 1973. – 312 p.
7. Krasilnikov O.I., Marchenko B.G., Priymak M.V. Protsesi z nezalezhnimi perIodichnimi prirostami I perIodichnI bIlI shumi // VIdbIr I obrobka InformatsIYi. – 1996. – Vip.10(86). – p.22-27.

Рецензія/Peer review : 24.7.2013 р. Надрукована/Printed :20.12.2013 р.