

РЕАЛІЗАЦІЯ НЕЯВНОЇ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ДВОМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ГРАФІЧНОМУ ПРОЦЕСОРНОМУ ПРИСТРОЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ATI STREAM TECHNOLOGY

Одними із найбільш досконалих програмно-апаратних комплексів на теперішній час є комплекс ATI Stream Technology і NVidia CUDA. Варто відзначити, що існує альтернативна платформа, володіюча властивістю переносимості в класі GPU – OpenCL, підтримана багатьма виробниками апаратного забезпечення (AMD, NVidia та ін.). Але на даний час OpenCL-додатки вимагають значних зусиль по оптимізації для кожного типу GPU. Тому в даній роботі розглядається ATI Stream Technology.

Ціллю роботи являється вирішення нестационарної задачі математичного моделювання з залученням неявних різницевоїх схем, з використанням графічних адаптерів, які підтримують ATI Stream Technology. В даній роботі поставлена проблема досліджується на модельній задачі – рішенні двомірного рівняння теплопровідності з використанням неявної різницевої схеми (п'ятиточковий шаблон типу «хрест»).

Ключові слова: Рівняння теплопровідності, ATI Stream Technology, метод кінцевих різниць.

DMYTRO VARCHAK, ALEXANDER MYASISCHEV
Khmelnytskyi National University

REALIZING IMPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR TWO- DIMENSIONAL SOLUTION HEAT EQUATION ON GRAPHICS PROCESSOR UNIT USING ATI STREAM TECHNOLOGY

One of the most advanced hardware and software is currently the range of ATI Stream Technology and NVidia CUDA. It is worth noting that there is an alternative platform portability owning property in the class GPU - OpenCL, supported by many hardware manufacturers (AMD, NVidia, etc ..). But now OpenCL-applications require significant efforts on optimization for each type of GPU. Therefore, in this paper the ATI Stream Technology.

The aim of the work is solving nonstationary problem of mathematical modeling involving implicit difference schemes, using graphics cards that support ATI Stream Technology. In this paper the problem is investigated for model problem - solving two-dimensional heat equation using implicit difference scheme (five points pattern of the "cross").

Keywords: heat equation, ATI Stream Technology, finite differences method.

Вступ

Швидкий темп розвитку обчислювальної техніки дозволяє побачити вирішення ресурсномістких задач у новому світлі. З впровадженням уніфікованих шейдерних блоків в графічні процесори, стало можливим використання графічних плат для розрахунку неграфічних задач. Одна з таких це обрахунок задачі теплопровідності.

Основна частина

Розглянемо завдання про поширення тепла в нескінченному твердому бруску з квадратним поперечним розрізом, на бічних стінках якого задані значення температури не змінюються по довжині бруска. У початковий момент часу температура бруска є постійною. У разі, якщо коефіцієнт температуропровідності a^2 постійний, розглянутий фізичний процес має двохмірну картину і в кожному поперечному перерізі бруска $\bar{D} = [0, L] \times [0, L]$ описується рівнянням з межовими умовами виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), (x, y) \in D, t > 0; \\ u(0, x, y) = u_0, (x, y) \in \bar{D} \\ u(t, x, y) = u_B, (t, x, y), (x, y) \in \Gamma = \bar{D} \setminus D, t > 0; \end{cases} \quad (1)$$

Наближене рішення задачі (1) будемо шукати з використанням методу кінцевих різниць. Для області D побудуємо рівномірну прямокутну сітку (рис. 1).

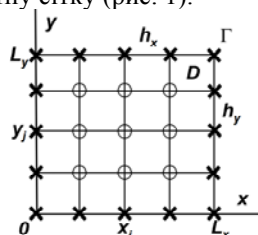


Рис. 1. Область $\bar{D} = D \cup \Gamma$ з нанесеною на неї сіткою $\bar{\Omega}_h$ для $N_x = N_y = 3$

$$\bar{\omega}_h = \left\{ \begin{array}{l} x_i = h_x \cdot i; i = 0, \dots, N_x + 1; h_x = L / (N_x + 1) \\ y_j = h_y \cdot j; j = 0, \dots, N_y + 1; h_y = L / (N_y + 1) \end{array} \right\}$$

Для переходу від диференціальної постановки (1) до кінцево – різницевої введемо сіткову функцію $\{v_{i,j}^m\}: v_{i,j}^m \approx u(t^m, x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h, t^m = m \times \tau, m = 0, 1, 2, \dots$. Сіткова функція $v_{i,j}^m$ залежить від індексів вузлів сітки i, j та номерів часових шарів m . Знайдені значення сіткової функції будуть представляти наближене рішення задачі (1) у обраних заздалегідь вузлах сітки в певні моменти часу.

Перейдемо до побудови різницевої схеми для рівняння (1). Для цього розглянемо це рівняння у внутрішньому вузлі сітки $(x_i, y_j) \in \omega_h$ в момент часу t^m . В якості різницевого шаблону оберемо шаблон, який представлений на Рис. 2.

Приведемо кінцево – різницеві формули для апроксимації диференціальних операторів рівняння теплопровідності:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^m \approx \frac{v_{i,j}^{m+1} - v_{i,j}^m}{\tau};$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}^m \approx \sigma \left(\frac{v_{i+1,j}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i-1,j}^{m+1}}{h_x^2}\right) + (1-\sigma) \left(\frac{v_{i+1,j}^m - 2v_{i,j}^m + v_{i-1,j}^m}{h_x^2}\right);$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j}^m \approx \sigma \left(\frac{v_{i,j+1}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1}}{h_y^2}\right) + (1-\sigma) \left(\frac{v_{i,j+1}^m - 2v_{i,j}^m + v_{i,j-1}^m}{h_y^2}\right);$$

Тут σ – ваговий коефіцієнт ($0 \leq \sigma \leq 1$).

Застосувавши розглянуті вище різницеві апроксимації диференціальних операторів з (1) у внутрішніх вузлах сітки і додавши до отриманих різницеvim рівнянням початкові і граничні умови у відповідних вузлах сітки, запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2).

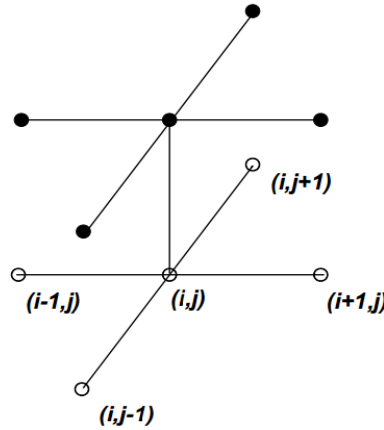


Рис. 2. Різницевий шаблон для рівняння (1). Світлі точки відносяться до m -му шару по часу, темні – до $(m+1)$ -му

Ваговий коефіцієнт σ визначає вид різницевої схеми: якщо $\sigma = 0$, то схема явна, тобто являє собою вирішені відносно невідомих $v_{i,j}^{m+1}$ рівняння; якщо $0 \leq \sigma \leq 1$, то схема неявна, в цьому випадку потрібно додатково розв'язувати рівняння різницевої схеми, щоб знайти значення невідомих $v_{i,j}^{m+1}$. Серед неявних схем особливої уваги заслуговує схема Кранка - Ніколсон ($\sigma = 0,5$). Ця різницева схема має другий порядок апроксимації за часом і координатним напрямом.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{m+1} - v_{i,j}^m}{\tau} &= a^2 \left[\sigma \left(\frac{v_{i+1,j}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i-1,j}^{m+1}}{h_x^2} \right) + (1-\sigma) \left(\frac{v_{i+1,j}^m - 2v_{i,j}^m + v_{i-1,j}^m}{h_x^2} \right) \right] + \\ &+ a^2 \left[\sigma \left(\frac{v_{i,j+1}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1}}{h_y^2} \right) + (1-\sigma) \left(\frac{v_{i,j+1}^m - 2v_{i,j}^m + v_{i,j-1}^m}{h_y^2} \right) \right]; \\ i &= \overline{1, N_x}; j = \overline{1, N_y}; m = 0, 1, 2, \dots \\ v_{0,j}^{m+1} &= u_B(0, y_j); v_{N_x+1,j}^{m+1} = u_B(L, y_j); j = \overline{0, N_y+1}; m = 0, 1, 2, \dots \\ v_{i,0}^{m+1} &= u_B(x_i, 0); v_{i,N_y+1}^{m+1} = u_B(x_i, L); i = \overline{0, N_x+1}; m = 0, 1, 2, \dots \\ v_{i,j}^0 &= u_B(x_i, y_j); i = \overline{0, N_x+1}; j = \overline{0, N_y+1} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Неявна різницева схема ($\sigma = 1$) абсолютно стійка, що теоретично не вимагає урахування якогось обмеження на крок τ .

Ці схеми апроксимують диференціальне рівняння з першим порядком за часом і другим по простору.

При $\sigma=1$ з (2) отримуємо:

$$v_{i,j}^{m+1} = v_{i,j}^m + \tau \cdot a^2 \left(\frac{v_{i+1,j}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i-1,j}^{m+1}}{h_x^2} \right) + \tau \cdot a^2 \left(\frac{v_{i,j+1}^{m+1} - 2v_{i,j}^{m+1} + v_{i,j-1}^{m+1}}{h_y^2} \right);$$

$$i = \overline{1, N_x}; j = \overline{1, N_y}; m = 0, 1, 2, \dots; \tag{3}$$

$$v_{0,j}^{m+1} = u_B(0, y_j); v_{N_x+1,j}^{m+1} = u_B(L, y_j); m = 0, 1, 2, \dots; j = 0, \dots, N_y + 1;$$

$$v_{i,0}^{m+1} = u_B(x_i, 0); v_{i,N_y+1}^{m+1} = u_B(x_i, L); m = 0, 1, 2, \dots; i = 0, \dots, N_x + 1;$$

$$v_{i,j}^{m+1} = u_0(x_i, y_j); i = 0, \dots, N_x + 1; j = 0, \dots, N_y + 1$$

Перепишемо отримані формули в наступному вигляді:

$$(1 + ap)v_{i,j}^{m+1} = ae \cdot v_{i+1,j}^{m+1} + aw \cdot v_{i-1,j}^{m+1} + an \cdot v_{i,j+1}^{m+1} + as \cdot v_{i,j-1}^{m+1} + b_{i,j};$$

$$i = 0, \dots, N_x + 1; j = 0, \dots, N_y + 1. \tag{4}$$

Коефіцієнти $ap, ae, aw, an, as, b_{i,j}$ визначаються з (4):

$$ae = aw = \frac{a^2 \cdot \tau}{h_x^2}; an = as = \frac{a^2 \cdot \tau}{h_y^2}; ap + aw + an + as;$$

$$b_{i,j} = v_{i,j}^m; i = \overline{1, N_x}; j = \overline{1, N_y};$$

$$i = 0; ap = a; b_{0,j} = u_B(0, y_j) ae = aw = as = an = 0;$$

$$i = N_x + 1; ap = 1; b_{N_x+1,j} = u_B(L, y_j); ae = aw = as = an = 0;$$

$$j = 0; ap = 1; b_{i,0} = u_B(x_i, 0) ae = aw = as = an = 0;$$

$$j = N_y + 1; ap = 1; b_{i,N_y+1} = u_B(x_i, L); ae = aw = as = an = 0;$$

Різниця схема (4) являє собою систему лінійних рівнянь виду $A\vec{x} = \vec{b}$, в якій \vec{x} є вектор-стовпець невідомих, компоненти якого - значення сіткової функції $\{v_{i,j}^{m+1}\}$. На Рис. 3 приведений вид вектора \vec{x} , довжина якого становить $(N_x+2)(N_y+2)$.

Матриця A системи (4) є п'яти-діагональна симетрична, позитивно визначена матриця, що складається з блоків чотирьох видів (Рис. 4): блоків E , відповідних одиничної матриці, блоків T з трьох-діагональною матрицею, блоків K , з діагональною матрицею, в якій перший і останні рядки складаються тільки з нульових елементів, і блоків 0 , об'єднуючих нульові значення.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v_{0,0}^{m+1} \\ v_{1,0}^{m+1} \\ \vdots \\ v_{N_x+1,0}^{m+1} \\ v_{0,1}^{m+1} \\ v_{1,1}^{m+1} \\ \vdots \\ v_{N_x+1,N_y+1}^{m+1} \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} u_B(x_0, y_0) \\ u_B(x_1, y_0) \\ \vdots \\ u_B(x_{N_x+1}, y_0) \\ u_B(x_0, y_1) \\ v_{1,1}^{m+1} \\ \vdots \\ u_B(x_{N_x+1}, y_{N_y+1}) \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & T & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & T & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & T & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & T & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & T & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & T & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & T & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & T & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & T & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Представлення вектора-стовпця невідомих і вектора-стовпця правої частини системи (4)

Рис. 4. Вигляд A системи (4)

Для чисельного рішення на МВС з розподіленою пам'яттю систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду (4), отриманих після застосування неявних апроксимаційних формул для диференціальної постановки задачі, як правило, не використовуються прями методи в силу невисокої ефективності їх паралельних версій (методу прогонки і методу циклічної редукції), чутливості до впливу похибки округлення, що особливо проявляється при вирішенні погано обумовлених систем великої розмірності, до яких відноситься і задача (4). Тому має сенс на кожному кроці за часом для вирішення системи (4) використовувати ітераційні методи.

Використовуючи дані про швидкодії графічних процесорів світових гігантів AMD та Nvidia, а саме моделей Radeon HD7970 та GeForce 680GTXа також данні по процесору Intel Core i7 3770 побудовано гістограму порівняння швидкодії в обрахунках задачі лінійної алгебри (4), де в кінцевому вигляді, пристрій обраховує операції з матрицями з одинарною точністю (Рис. 5).

Швидкодія графічних процесорів у задачі лінійної алгебри (у GFlops)

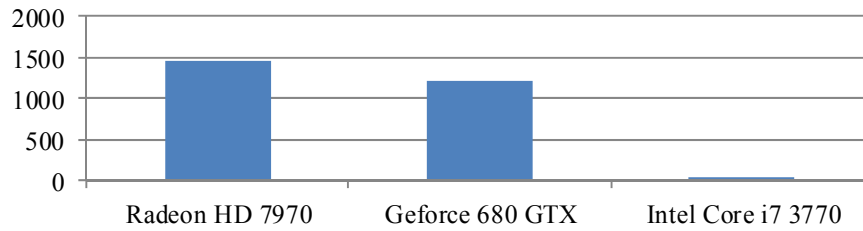


Рис. 5. Порівняння швидкодії графічних процесорів та центрального процесору

Висновки

Отже виходячи з порівняння на гістограмі видно що доцільно використовувати графічні процесори фірми AMD з використанням технології ATI Stream Technology для виконання обчислень задач лінійної алгебри, які в кінцевому вигляді зводяться до виконання обчислень над матрицями. Швидкодія на графічному процесорі більша ніж на центральному у 30 разів. Обчислення задач нелінійної алгебри добре розпаралелюються, і тому через велику кількість універсальних шейдерних процесорів, а саме 2048 проти 4 звичайних у Intel Core i7 3770 досягається такий приріст.

Література

1. Клосс Ю. Ю. Рішення рівнянь Больцмана на графічних процесорах / Ю. Ю. Клосс, Ф. Г. Черемисин, П. В. Шувалов // Розрахункові методи та програмування.-2010-т.11
2. Самарський О. А. Методи рішення сіткових рівнянь / Самарський О. А., Ніколаєв Е. С. // М.: Наука.-1978-591с.
3. Diffusion: Technology Discussion: NVIDIA GTX680 vs. ATI Radeon 7970 - SGEMM and DGEMM [Електронний ресурс]. Режим доступу : URL : <http://diffusionht.blogspot.com/2013/08/nvidia-gtx680-vs-ati-radeon-7970-sgemm.html>. – Назва з екрана.
4. Technical Overview - ATI Stream Computing [Електронний ресурс]. Режим доступу : URL : http://www.student.chemia.uj.edu.pl/~mrozek/USI/wyklad/No-we_konstrukcje/Stream_Computing_Overview.pdf. – Назва з екрана.

References

1. Kloss U. U. Rishennya rivnyan Boltsmana na grafichnyh / U. U. Kloss, F. G. Cheremusun, P. V. Shuvalo // Rozrahunkovi metodu ta programuvannya.-2010-t.11
2. Samarskui O. A. Metodu rishennya sitkovuh rivnyan / Samarskui O. A., Nikolaev E. S. // M.: Nayka.-1978-591s.
3. Diffusion: Technology Discussion: NVIDIA GTX680 vs. ATI Radeon 7970 - SGEMM and DGEMM [Elektronni resurs].Rezhum dostupu: URL : <http://diffusionht.blogspot.com/2013/08/nvidia-gtx680-vs-ati-radeon-7970-sgemm.html>. – Nazva z ekrana.
4. Technical Overview - ATI Stream Computing [Elektronni resurs]. Rezhum dostupu : URL : http://www.student.chemia.uj.edu.pl/~mrozek/USI/wyklad/No-we_konstrukcje/Stream_Computing_Overview.pdf. – Nazva z ekrana.

Рецензія/Peer review : 4.12.2014 р.

Надрукована/Printed :26.12.2014 р.