УДК 681.327.6

А.В. ГОРОДНИЙ
ДВНЗ «Киевский национальный экономический университет им. Вадима Гетьмана» ,
В.И. КОРНЕЙЧУК
ДВНЗ Национальный технический университет «Киевский политехнический институт»

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОДОВ ДЛЯ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ВРЕМЕННОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

Рассмотрен подход к решению задачи повышения корректирующей способности кодов для запоминающих устройств и/или снижение информационной избыточности при той же корректирующей способности исправления ошибок в ячейках памяти. Это достигается введением временной избыточности в алгоритм функционирования запоминающего устройства путем чтения-записи прямых и обратных кодов с их последующим анализом.

Ключевые слова: запоминающее устройство, корректирующий код, кодовое расстояние

A.V. GORODNIY
DVNZ "University of Kyiv National ekonomicheskyVadym Hetman"
V.I. KORNEYCHUCK
DVNZ National Technical University "Kyiv Polytechnic Institute"

ABOUT THE EFFECTIVENESS OF ERROR-CORRECTING CODES FOR A STORAGE DEVICE WITH THE TEMPORAL REDUNDANCY

An approach to the problem of improving the ability of correcting codes for storage and / or reduction of information redundancy at the same correction error correction capability in the memory cells. This is achieved by introducing a temporal redundancy in the operation of the algorithm memory by reading the records of direct and inverse codes and their subsequent analysis.

Keywords: storage device, correction code, the minimum distance

Введение

Применение в запоминающих устройствах (ЗУ) корректирующих кодов связано с введением информационной избыточности, величина которой тем больше, чем выше корректирующая способность кода. Это является недостатком, т.к. при постоянной общей емкости ЗУ приводит к снижению его эффективной (полезной) емкости либо при постоянной эффективной емкости вызывает снижение надежности хранения информации. Указанные недостатки могут быть уменьшены за счет совместного использования временной и информационной избыточности, которое создает возможность: а) повышения эффективной емкости ЗУ при той же надежности хранения информации либо б) повышения надежности хранения информации при той же эффективной емкости ЗУ.

Анализ первоисточников

Рассмотрим некоторые возможные способы сочетания временной и информационной избыточности в ЗУ, содержащих ячейки с отказавшими запоминающими элементами (ЗЭ). Способы основаны на записи и считывании прямых и обратных кодов. Это позволяет обнаружить устойчивые отказы ЗЭ по совпадению цифр в прямом и обратном кодах, считанных из данной ячейки. Если при этом имеется информация о наличии ошибки в считанном слове, то появляется возможность вообще устранить ошибку.

Способ №1 [1, 2]. Предположим для конкретности, что используемый корректирующий код исправляет любую одиночную и обнаруживает любую двойную ошибку. Пусть рассматриваемая ячейка имеет в i-ом и j-ом разрядах отказы, т.е. ЗЭ, соответствующие этим разрядам, превратились в генераторы констант b_i и $b_j \in \{0,1\}$. Тогда при считывании из этой ячейки слова

$$k_1 \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n \ ,$$

где $(k_1 \ldots . k_m)$ – информационные разряды, $(k_{m+1} \ldots k_n)$ – контрольные разряды, возможно четыре случая:

$$\begin{aligned}
&1.\ k_i = b_i,\ \ k_j = b_j \\
&2.\ k_i = b_i,\ \ k_j = b_j \quad (k_j = \bar{b_j}) \\
&3.\ k_i = b_i,\ \ k_j = b_j \quad (k_i = \bar{b_i}) \\
&4.\ k_i = b_i,\ \ k_j = b_j \quad (k_i = \bar{b_i}, k_j = \bar{b_j})
\end{aligned} \tag{1}$$

Первый случай в (1) соответствует отсутствию ошибки в слове. Второй и третий случаи соответствуют появлению одиночной ошибки, которая будет исправлена данным корректирующим кодом. Последний, 4-й случай соответствует наличию двойной ошибки, которая данным кодом будет только обнаружена. В этом случае при считывании слова получим код

$$k_1 \ \ldots \ k_{i-1} b_i k_{i+1} \ \ldots \ k_{j-1} b_j k_{j+1} \ \ldots \ k_m k_{m+1} \ \ldots \ k_n \tag{2}$$

Инвертирование информационной части слова при этом и последующее кодирование даст

$$\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_{i-1}\, \bar{b}_i\, \bar{k}_{i+1} \ldots \bar{k}_{j-1}\, \bar{b}_j\, \bar{k}_{j+1} \ldots \bar{k}_m\, \widetilde{k}_{m+1} \ldots \widetilde{k}_n \qquad (3)$$

тут (знак ~ означает инверсное или прямое значение разряда).

После записи полученного слова в рассматриваемую ячейку и его чтения получим

$$\overline{k}_1 \ldots \overline{k}_{i-1} b_i \overline{k}_{i+1} \ldots \overline{k}_{j-1} b_j \overline{k}_{j+1} \ldots \overline{k}_m \widetilde{k}_{m+1} \ldots \widetilde{k}_n \qquad (4)$$

Цифры в i-ом и j-ом разрядах не изменились, т.к. из-за отказов соответствующие ЗЭ превратились в генераторы констант b_i и b_j. В результате опять будет обнаружена ошибка (независимо от того, произошли отказы в информационных или контрольных разрядах).

Инвертирование информационной части считанного кода и последующее кодирование даст

$$k_1 \ldots k_{i-1} \overline{b}_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} \overline{b}_j k_{j+1} \ldots k_m \widetilde{k}_{m+1} \ldots \widetilde{k}_n \qquad (5)$$

С учетом 4-го случая в (1) получим кодовое слово

$$k_1 \ldots k_{i-1} k_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} k_j k_{j+1} \ldots k_m \widetilde{k}_{m+1} \ldots \widetilde{k}_n, \qquad (6)$$

в котором ошибка отсутствует.

Можно обобщить приведенное доказательство на случай корректирующих кодов, исправляющих (*q-1*) - кратные ошибки и обнаруживающих ошибки кратности q (q = 1,2, …), откуда следует важный вывод, что рассмотренный 1-й способ позволяет в случае использования кодов, исправляющих (*q-1*) - кратные ошибки и обнаруживающих ошибки кратности q, не только обнаруживать q- кратные ошибки, но и исправлять их.

Рассмотрим способ №2 [3], предполагающий, что используемый корректирующий код исправляет любую одиночную и обнаруживает любую тройную ошибку. Пусть рассматриваемая ячейка имеет в i-ом, j-ом и l-ом разрядах указанные выше устойчивые отказы. Тогда при считывании из этой ячейки слова $k_1 \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n$ возможны следующие восемь случаев:

$$\begin{aligned}
&1.\ k_i = b_i,\ k_j = b_j,\ k_l = b_l \\
&2.\ k_i = b_i,\ k_j = b_j,\ k_l \neq b_l,\ (k_l = \overline{b}_l) \\
&3.\ k_i = b_i,\ k_j \neq b_j,\ k_l = b_l,\ (k_j = \overline{b}_j) \\
&4.\ k_i = b_i,\ k_j \neq b_j,\ k_l \neq b_l,\ (k_j = \overline{b}_j,\ k_l = \overline{b}_l) \\
&5.\ k_i \neq b_i,\ k_j = b_j,\ k_l = b_l,\ (k_i = b_i) \\
&6.\ k_i \neq b_i,\ k_j = b_j,\ k_l \neq b_l,\ (k_i = \overline{b}_i,\ k_l = \overline{b}_l) \\
&7.\ k_i \neq b_i,\ k_j \neq b_j,\ k_l = b_l,\ (k_i = \overline{b}_i,\ k_j = \overline{b}_j) \\
&8.\ k_i \neq b_i,\ k_j \neq b_j,\ k_l \neq b_l,\ (k_i = \overline{b}_i,\ k_j = \overline{b}_j,\ k_l = \overline{b}_l)
\end{aligned} \qquad (7)$$

Первый случай в (7) соответствует отсутствию ошибки в слове. Второй, третий и пятый случаи в (7) соответствуют появлению одиночной ошибки, которая будет исправлена данным корректирующим кодом. Четвертый, шестой и седьмой в (7) - соответствуют наличию двойной ошибки, а последний, 8-й случай – наличию тройной ошибки, которые данным кодом будут обнаружены. В этих случаях при считывании слова получим код

$$k_1 \ldots k_{i-1} b_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} b_j k_{j+1} \ldots k_{l-1} k_l k_{l+1} \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n \qquad (8)$$

Инвертирование всего кодового слова даст

$$\overline{k}_1 \ldots \overline{k}_{i-1} \overline{b}_i \overline{k}_{i+1} \ldots \overline{k}_{j-1} \overline{b}_j \overline{k}_{j+1} \ldots \overline{k}_{l-1} \overline{b}_l \overline{k}_{l+1} \ldots \overline{k}_m \overline{k}_{m+1} \ldots \overline{k}_n \qquad (9)$$

После записи полученного слова в рассматриваемую ячейку и его последующем чтении получим

$$\overline{k}_1 \ldots \overline{k}_{i-1} b_i \overline{k}_{i+1} \ldots \overline{k}_{j-1} b_j \overline{k}_{j+1} \ldots \overline{k}_{l-1} b_l \overline{k}_{l+1} \ldots \overline{k}_m \overline{k}_{m+1} \ldots \overline{k}_n \qquad (10)$$

Инвертирование кодового слова даст:

$$k_1 \ldots k_{i-1} \overline{b}_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} \overline{b}_j k_{j+1} \ldots k_{l-1} \overline{b}_l k_{l+1} \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n \qquad (11)$$

С учетом в (7) 4-го, 6-го, 7-го и 8-го случаев получим соответственно коды:

$$\begin{aligned}
&k_1 \ldots k_{i-1} \overline{k}_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} k_j k_{j+1} \ldots k_{l-1} k_l k_{l+1} \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n\ , \\
&k_1 \ldots k_{i-1} \overline{k}_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} \overline{k}_j k_{j+1} \ldots k_{l-1} k_l k_{l+1} \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n\ , \\
&k_1 \ldots k_{i-1} k_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} k_j k_{j+1} \ldots k_{l-1} \overline{k}_l k_{l+1} \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n\ , \\
&k_1 \ldots k_{i-1} k_i k_{i+1} \ldots k_{j-1} k_j k_{j+1} \ldots k_{l-1} k_l k_{l+1} \ldots k_m k_{m+1} \ldots k_n\ .
\end{aligned} \qquad (12)$$

В первых трех кодах в (12) имеется одиночная ошибка, которая будет исправлена, а в последнем коде ошибка вообще отсутствует. Легко можно убедиться, что в первых трех кодах способ №1 не позволил бы исправить одиночные ошибки.

Можно обобщить приведенное для случая корректирующих кодов, исправляющих q_n - кратные ошибки и обнаруживающих ошибки кратности $q_{об}$

$$(q_n + 1 \le q_{об} \le 2q_n + 1;\ q_n = 0, 1, 2 \ldots), \tag{13}$$

т.е. рассмотренный способ позволяет в этом случае не только обнаруживать $q_{об}$ – кратные ошибки , а и исправлять их.

Постановка задачи

Определим увеличение эффективной ёмкости (уменьшение информационной избыточности) и/или повышение надежности хранения информации (увеличение кратности исправимых ошибок), получаемые с помощью рассмотренных способов по сравнению с обычными (базовым) способом, использующим код, исправляющий q – кратные ошибки.

Решение

Для нахождения указанных величин необходимо знать зависимость между количеством контрольных разрядов r , с одной стороны, и кодовым расстоянием d , обеспечивающим заданные корректирующие свойства кода, и числом информационных разрядов m , с другой стороны. Хотя точное решение для функции $r = f(d, m)$ в настоящее время не известно, имеются приближенные оценки зависимости r от d и m , которые определяют количество контрольных разрядов с недостатком $\underline{r}$ или с избытком $\overline{r}$ и называемые соответственно нижней и верхней границами [4] :

$$\begin{aligned} r(d,m) &\ge \underline{r}(d,m) \to 1/2\,(d-1)\log_2 m\ , \\ r(d,m) &\le \overline{r}(d,m) \to (d-2)\log_2 m\ . \end{aligned} \tag{14}$$

Найдем относительное уменьшение информационной избыточности, которое может быть получено в рассмотренных способах при использовании новых кодов, исправляющих и обнаруживающих ошибки и обеспечивающих ту же кратность исправимых ошибок, что и код в базовом способе.

Нижняя и верхняя границы относительного уменьшения информационной избыточности, получаемые при использовании рассмотренных способов, определяются соответственно по формулам:

$$\begin{gathered} \frac{d_0 - d_1}{d_0 - 1} < \frac{\Delta_1 r}{r_0}(d,m) < \frac{d_0 - d_1}{d_0 - 2} \\ \frac{d_0 - d_2}{d_0 - 1} < \frac{\Delta_2 r}{r_0}(d,m) < \frac{d_0 - d_2}{d_0 - 2} \end{gathered} \tag{15}$$

где $\Delta_1 r$, $\Delta_2 r$ - уменьшение информационной избыточности, получаемое при использовании соответственно способа 1 и способа 2;

d_0 ,d_1 , d_2 – кодовые расстояния кодов, используемых соответственно в базовом и рассмотренных способах.

Кодовые расстояния d_0 , d_1 и d_2 определяются по формулам :

$$d_0 = 2q_{no} + 1\ , \tag{16}$$

где q_{n0} - кратность ошибки, исправимой кодом в базовом способе;

$$d_1 = (q_{n1} - 1) + q_{n1} + 1\ , \tag{17}$$

где $(q_{n1}\ - 1)$ – кратность ошибки, исправимой кодом в способе 1,

q_{n1} -кратность ошибки, обнаруживаемой кодом в способе 1;

$$d_2 = \left\{\begin{matrix} 1/2(q_{02} - 1) + q_{02} + 1 & q_{02} - нечётн. \\ 1/2q_{02} + q_{02} + 1 & q_{02} - чётн. \end{matrix}\right\}, \tag{18}$$

где $\left\{\begin{matrix} 1/2(q_{02}-1) & (q_{02} - нечётн.) \\ 1/2q_{02} & (q_{02} - чётн.) \end{matrix}\right\}$ – кратность исправимой ошибки по способу 2.

Руководствуясь условием равных кратностей исправимых ошибок, что обеспечивается базовым и соответственно рассматриваемыми способами, можно записать:

$$q_{n0} = q_{n1} \quad \text{и} \quad q_{n0} = q_{02}\ . \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} d_0 - d_1 = 1\ , \\ d_0 - d_2 = \left\{\begin{matrix} 1/2(q_{n0} + 1) & (q_{n0} - нечётн.) \\ 1/2q_{n0} & (q_{n0} - чётн.) \end{matrix}\right\} \end{gathered} \tag{20}$$

В результате для относительного (по сравнению с базовым способом) снижения информационной избыточности, получаемого при использовании способов 1 и 2, можно соответственно определить следующие границы

$$\frac{1}{2q_{n0}} < \frac{\Delta_1 r}{r_0}(q_{n0}, m) < \frac{1}{2q_{n0} - 1}; \tag{21}$$

$$\begin{array}{lll} \dfrac{q_{n0}+1}{4q_{n0}} < \dfrac{\Delta_2 r}{r_0}(q_{n0},m) < \dfrac{q_{n0}+1}{2(2q_{n0}-1)} & & q_{n0} - \text{нечётн.} \\ \dfrac{1}{4} < \dfrac{\Delta_2 r}{r_0}(q_{n0},m) < \dfrac{q_{n0}}{2(2q_{n0}-1)} & & q_{n0} - \text{чётн.} \end{array} \qquad (22)$$

Графики зависимости $\dfrac{\Delta_1 r}{r_0}(q_{n0},m)$ и $\dfrac{\Delta_2 r}{r_0}(q_{n0},m)$, соответствующие (21) и (22), представлены на рис.1 и 2, соответственно. Снижение информационной избыточности при способе 1 составляет 50 – 100% для q_{n0} = 1 и уменьшается до нуля для больших q_{n0}, а при способе 2 составляет 50-100% для q_{n0} = 1 и уменьшается до 25% для больших для q_{n0}независимо от числа информационных разрядов.

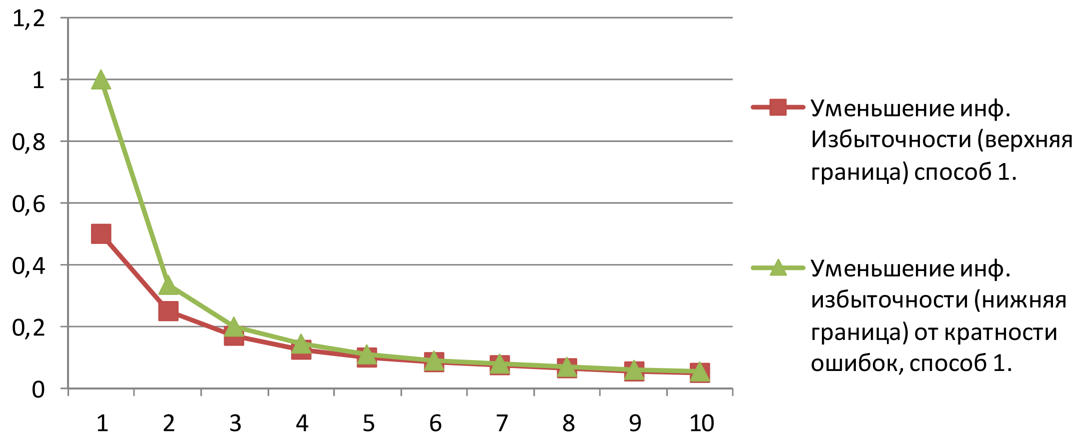

Рис.1. Границы относительного снижения информационной избыточности от кратности ошибок при способе 1

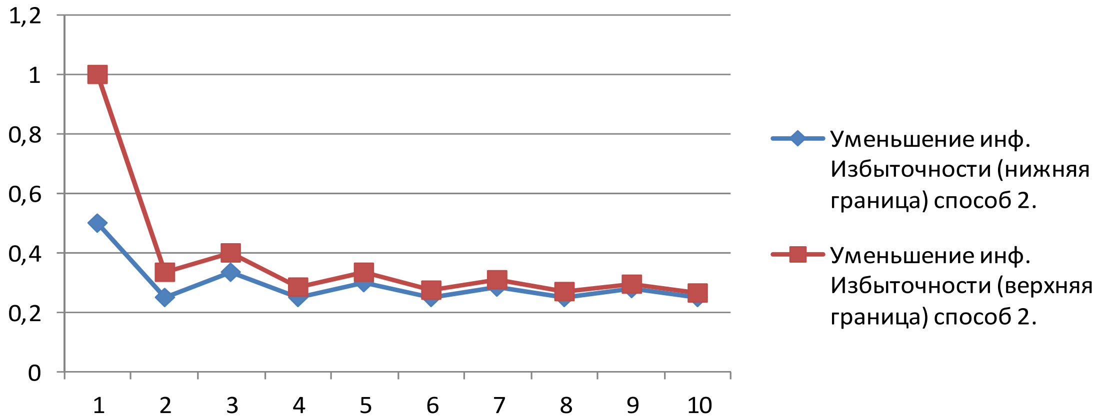

Рис.2. Границы относительного снижения информационной избыточности от кратности ошибок при способе 2

Относительное увеличение кратности исправимых ошибок для рассмотренных способов при использовании новых кодов, исправляющих и обнаруживающих ошибки и обладающих той же информационной избыточностью, что и код в базовом способе, может быть определено соответственно по формулам:

$$\frac{\Delta_1 q}{q_{n0}}(q_{n0}) = \frac{q_{n1}}{q_{n0}} - 1 \;, \qquad (23)$$

$$\frac{\Delta_2 q}{q_{n0}}(q_{n0}) = \frac{q_{02}}{q_{n0}} - 1 \;. \qquad (24)$$

Кратности исправимых ошибок в способах 1 и 2 соответственно q_{n1} и q_{02} могут бать найдены из условия равных информационных избыточностей кодов, используемых в рассмотренных и базовом способах. Очевидно, что равенство информационных избыточностей этих кодов при одинаковых длинах информационных слов сводится к равенству кодових расстояний

$$d_0 = d_1 \quad \text{и} \quad d_0 = d_2 \;, \qquad (25)$$

откуда следует, что

$$\begin{array}{l} q_{n1}(q_{n0}) = [q_{n0} + 1/2] \;; \\ q_{02}(q_{n0}) = \begin{cases} [1/3(4q_{n0}+1)] & (q_{02} - \text{нечётн.}) \\ [4/3q_{n0}] & (q_{02} - \text{чётн.}) \end{cases} \end{array} \qquad (26)$$

где $[x]$ - ближайшее к x меньшее целое число.

В результате относительное увеличение кратности исправимых ошибок соответственно составит

$$\frac{\Delta_1 q}{q_{n0}}(q_{n0}) = 0 \ ; \tag{27}$$

$$\frac{\Delta_2 q}{q_{n0}}(q_{n0}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{[1/3(4q_{n0}+1)]}{q_{n0}} - 1 & (q_{02} - \textit{нечётн.}) \\ \dfrac{[4/3q_{n0}]}{q_{n0}} - 1 & (q_{02} - \textit{чётн.}) \end{Bmatrix} \tag{28}$$

График зависимости $\frac{\Delta_2 q}{q_{n0}}(q_{n0})$ согласно (28) представлен на рис.3.

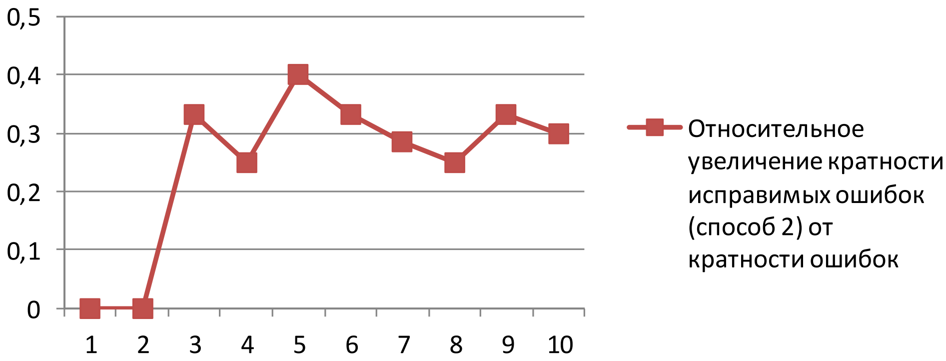

Рис.3. Относительное увеличение кратности исправимых ошибок при способе 2.

Выводы

Полученные зависимости показывают, что, во-первых, при способе 2 относительное увеличение кратности исправимых ошибок имеет место при $q_{n0} \geq 3$ и стремится к 33% для больших q_{n0}, а при способе 1 увеличения кратности исправимых ошибок не происходит. Во-вторых, при способе 2 снижение информационной избыточности достигает 50…100% для q_{n0} = 1 и уменьшается до 25% для больших q_{n0} независимо от числа информационных разрядов, в то время как для способа 1, также составляя 50 ...100% для q_{n0} = 1, падает до нуля с ростом q_{n0}. Это свидетельствует об эффективности такого [3] сочетания временной и информационной избыточности в запоминающих устройствах.

Литература

1. Долгов А.И. Запоминающее устройство. Авт. свид. СССР №333805
2. Корнейчук В.И., Городний А.В., Небукин А.И. Запоминающее устройство Авт. свид. СССР № 385319
3. Самофалов К.Г., Корнейчук В.И., Городний А.В., Небукин А.И. Запоминающее устройство Авт. свид.СССР № 436388
4. Варшамов Р.Р. Оценка числа сигналов в кодах с коррекцией ошибок «Доклады АН СССР», т.117, №5, 1957.

References

1. Dolgov A.I. Zapominajuchee ustroistvo. Auth. svid.USSR №333805
2. Kornejchuk V.I., Gorodniy A.V., Nebukin A.I. Zapominajuchee ustroistvo.Auth. svid.SSSR № 385319
3. Samofalov K.G., Kornejchuk V.I., Gorodniy A.V., Nebukin A.I. Zapominajuchee ustroistvo. Auth. svid.SSSR № 436388
4. Varshamov R.R. Otsenka chisla signalov v kodah s korrektsiey oshibok «Doklady AN SSSR», t.117, №5, 1957.

Рецензія/Peer review : 7.1.2015 р. Надрукована/Printed :24.1.2015 р.
Стаття рецензована редакційною колегією