

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОБУДОВИ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ СЕНСОРА ПО ПОВЕРХНІ ДЕТАЛІ

В статті розглянута математична модель процесу вимірювання та побудови імітаційної моделі по заданій базі точок за допомогою систем автоматизованого проектування. Розроблено метод суміщення фізичного об'єкту вимірювання і його математичної моделі. Визначені значення лінійних і кутових зсувів, які складають вихідну інформацію для корекції системи координат фізичної моделі. Розроблена методика побудови моделі об'єктів, яка базується на тривимірній поліноміальній апроксимації.

Ключові слова: контролю складних просторових поверхонь, математична модель, системи автоматизованого проектування, апроксимація, поліноми Бернштейна.

М. KATAEVA

National Aviation University, Kyiv

MATHEMATICAL MODELS OF THE MOTION PATH FROM THE SENSORS SURFACE OF THE PART

In the article the mathematical model of the measurement process and the construction of a simulation model based on the set of points with the help of computer-aided design systems. The method of combining measurements of a physical object and its mathematical model. The values of linear and angular displacements, which constitute the original information for correcting the coordinate system of the physical model. A method for constructing a model of objects, based on the three-dimensional polynomial approximation.

Keywords: control of complex three-dimensional surfaces, mathematical model, computer-aided design, approximation of Bernstein polynomials.

Вступ

В процесі експлуатації та внаслідок впливу дестабілізуючих факторів (зміни температури, навантажень, вібрацій тощо) авіаційні деталі зазнають певних деформацій, що може стати причиною появи відмов. Вчасне виявлення відхилень деталей від заданої форми забезпечує підтримку і відновлення працездатного стану деталі шляхом проведення технічного обслуговування і ремонтів. Тому актуальним є завдання розробки та впровадження нових методів контролю авіаційних деталей складної геометричної форми.

Для контролю авіаційних деталей складної геометричної форми широко використовують координатно-вимірювальні машини. Точність вимірювання на прецизійних координатно-вимірювальних машинах складає 0,5 мкм, що не задовольняє вимогам до вимірювання деталей авіаційної галузі.

Цифрові значення координат отримані за допомогою координатно-вимірювальних машин не вирішують повністю задачу контролю складних просторових поверхонь. Необхідно порівняти не тільки набори точок вимірювальних і отриманих по математичній моделі, а також рівняння поверхонь.

На ряду з методом математичного моделювання при проведенні контролю, сучасний стан розвитку інформаційних технологій та широке застосування систем автоматизованого проектування надають можливість використання імітаційного комп'ютерного моделювання, яке дозволяє досліджувати складні просторові форми авіаційних деталей та прогнозувати їх майбутній стан в залежності від впливу різних дестабілізуючих факторів. Досягається це шляхом побудови математичної моделі окремої деталі, її подальшого комп'ютерного моделювання та порівняння параметрів отриманої моделі із параметрами, зазначеними у конструкторській документації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз зарубіжних та вітчизняних досліджень засобів та методів контролю авіаційних деталей складної геометричної форми показав, що традиційні методи контролю, побудовані виключно на основі математичного опису, повинні бути доповнені принципами комп'ютерного моделювання. Це дає можливість цілісного вивчення деформацій деталі, прогнозування її подальших деформацій шляхом імітації впливу дестабілізуючих факторів, сприяє підвищенню точності та швидкодії процесу вимірювань.

Постановка задачі

Від суміщення параметрів об'єкту вимірювання та його математичної та комп'ютерної моделі у великій мірі залежить точність контролю складної просторової поверхні. Проблемою на цьому етапі контролю може виступати невідповідність системи координат контрольованої авіаційної деталі та побудованої на основі її показників математичної моделі. Цей зсув систем координат може спричинити появу ризиків першого роду, коли через похибки базування придатну деталь можуть визнати непридатною.

Основні проблеми обробки результатів вимірювання складних просторових поверхонь полягають у точності установки моделі на поворотному столі трикоординатної інформаційно-вимірювальної системи, оскільки уточнення базування моделі обмежується точністю виготовлення баз і розташування контрольованої поверхні, а також точністю їхнього візування при вимірюваннях. Безпосередні вимірювання координат контрольованих точок поверхні об'єкта можуть бути встановлені тільки відносно на підставі проведення досить великої множини вимірювань.

Внаслідок похибок базування обмірюваних точок поверхні необхідно знайти відповідні їм точки на математичній моделі об'єкту та побудувати на їх основі комп'ютерну модель, яка би максимально

відповідала параметрам деталі. Для авіаційних деталей складної геометричної форми суміщення відповідних точок математичної моделі з результатами обходу навколо поверхні дозволяє зробити висновок про точність вимірювання об'єкту.

При вимірюваннях положення осей об'єкту (фізичної моделі і її елементів) після установки на поворотному столі в загальному випадку не збігається з осями трикоординатної ІВС. Відмінності визначають помилку базування, що повинна бути усунута перед суміщенням результатів вимірювання з вихідною математичною моделлю об'єкту.

Таким чином, оцінка точності базування повинна формуватися як на основі вимірювання баз, так і з урахуванням необхідної та достатньої кількості точок контрольованої поверхні.

Розв'язання задачі

Для проведення оцінки суміщення контрольованої авіаційної деталі з її комп'ютерною моделлю, на математичній моделі задається ряд контрольних точок та проводиться вимірювання відповідних їм точок на фізичній моделі[1-2]. Число точок N і їхнє розташування залежить від конкретної форми моделі і визначається в залежності від точності вимірювання.

Необхідно знайти перетворення R , що переводить систему $(XYZO)$ у систему $(XYZO)$ так, щоб сума квадратів відстаней від перетворених вимірюваних точок $c^i = R(b_i)$ до відповідних їм точок математичної моделі була мінімальною

$$\sum_{i=1}^N \left[(a_x^i - c_x^i)^2 + (a_y^i - c_y^i)^2 + (a_z^i - c_z^i)^2 \right] \Rightarrow \min. \tag{1}$$

Число контрольних точок N і їхнє розташування залежить від конкретної форми моделі і визначається в залежності від точності вимірювання[3].

Перетворення для вимірюваної точки b_i в координатній формі має наступний вигляд:

$$C = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + b_x - b_y \gamma + b_z \beta \\ P_y + b_x \gamma + b_y + b_z \alpha \\ P_z - b_x \beta + b_y \alpha + b_z \end{bmatrix}.$$

Підставивши значення c_x , c_y і c_z у виразі для суми квадратів відстаней від перетворених вимірюваних точок $c^i = R(b_i)$ до відповідних їм точок математичної моделі, одержуємо вираз для функції Лагранжа

$$J = \sum_{i=1}^N (a_x^i - b_x^i - P_x + b_y^i \gamma - b_z^i \beta)^2 + \sum_{i=1}^N (a_y^i - b_y^i - P_y + b_x^i \alpha - b_z^i \gamma)^2 + \sum_{i=1}^N (a_z^i - b_z^i - P_z - b_y^i \alpha + b_x^i \beta)^2.$$

Прирівняємо вирази для частинних похідних до нуля і згрупуємо подібні члени, одержимо систему лінійних рівнянь, де $P_x, P_y, P_z, \alpha, \beta, \gamma$ визначають перетворення.

$$[D] \times [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T = [H], \tag{2}$$

де $[D]$ - матриця розміром 6×6 , $[H]$ - стовпець вільних членів, T означає транспонування.

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{66} \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_6 \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $[D]$ і стовпця $[H]$ визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} d_{11} &= -N; \quad d_{12} = 0; \quad d_{13} = 0; \quad d_{14} = 0; \quad d_{15} = -S_z; \quad d_{16} = S_y; \\ d_{21} &= 0; \quad d_{22} = -N; \quad d_{23} = 0; \quad d_{24} = S_z; \quad d_{25} = 0; \quad d_{26} = -S_x; \\ d_{31} &= 0; \quad d_{32} = 0; \quad d_{33} = -N; \quad d_{34} = -S_y; \quad d_{35} = S_x; \quad d_{36} = 0; \\ d_{41} &= 0; \quad d_{42} = -S_z; \quad d_{43} = S_y; \quad d_{44} = S_y^2 + S_z^2; \quad d_{45} = -S_{xy}; \quad d_{46} = -S_{xz}; \\ d_{51} &= S_z; \quad d_{52} = 0; \quad d_{53} = -S_x; \quad d_{54} = -S_{xy}; \quad d_{55} = S_x^2 + S_z^2; \quad d_{56} = -S_{yz}; \\ d_{61} &= -S_y; \quad d_{62} = S_x; \quad d_{63} = 0; \quad d_{64} = -S_{xz}; \quad d_{65} = -S_{yz}; \quad d_{66} = S_x^2 + S_y^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= -\sum_{i=1}^N (a_x^i - b_x^i); & h_2 &= -\sum_{i=1}^N (a_y^i - b_y^i); \\ h_3 &= -\sum_{i=1}^N (a_z^i - b_z^i); & h_4 &= -\sum_{i=1}^N (a_y^i b_z^i - a_z^i b_y^i); \end{aligned}$$

$$h_5 = -\sum_{i=1}^N (a_z^i b_x^i - a_x^i b_z^i) \quad ; \quad h_6 = -\sum_{i=1}^N (a_x^i b_y^i - a_y^i b_x^i)$$

Визначені значення лінійних і кутових зсувів ($P_x, P_y, P_z, \alpha, \beta, \gamma$) складають вихідну інформацію для оператора-метролога трикоординатної вимірювальної системи з метою корекції системи координат фізичної моделі, що враховано в програмно-математичному забезпеченні систем автоматизованого проектування.

Після базування фізичної моделі на ній проводиться ряд кільцевих вимірів, що відповідають контрольним обводам (перетинам) математичної моделі [4-5]. В якості порції поверхні використовуються функції, що задаються аналітично за допомогою введених поліномів Бернштейна. На всій побудованій поверхні неперервні частинні похідні не нижче четвертого порядку, на кожній порції зберігається знак другої похідної уздовж координатних напрямків.

Отримана крива неперервна разом з усіма похідними до заданого порядку. На всій побудованій поверхні в цілому існують безперервні приватні похідні не нижче четвертого порядку, на кожній порції зберігається знак другої похідної уздовж координатних напрямків. Є можливість побудови кривих і поверхонь, як завгодно мало відхиляються від задають точок.

Для заданої цілої величини $L > 0$ і $\xi \in [0,1]$ введемо позначення [6]:

$$C_1^j = \frac{l^j}{j^1 (i-j)}, \quad \varepsilon_k = \frac{C_{L+k}^L}{L+k}, \quad d_L = \frac{C_{2L}^L}{2^{2L+2}}$$

та функції

$$h_1(\xi) = \xi^{L+1} \sum_{k=0}^L \varepsilon_k (1-\xi)^k, \quad h_2(\xi) = \xi^{L+1} \sum_{k=1}^L \varepsilon_k k (1-\xi)^k, \quad h_3(\xi) = (1-\xi)^{L+1} \sum_{k=0}^L \varepsilon_k \xi^k, \\ h_4(\xi) = (1-\xi)^{L+1} \sum_{k=1}^L \varepsilon_k k \xi^k, \quad h(\xi) = \xi^{L+1} \sum_{k=0}^L \varepsilon_k (L-k)(1-\xi)^k, \quad (3)$$

які задовольняють співвідношенням

$$h_4(\xi) = \xi - Lh_1(\xi), \quad Lh_3(\xi) = 1 - \xi - h_2(\xi), \quad h(\xi) = Lh_1(\xi) - h_2(\xi), \\ h'(\xi) = dh/d\xi = 2L\xi^L \sum_{k=0}^{L-1} \varepsilon_k (1-\xi)^k, \quad h''(\xi) = d^2h/d\xi^2 = 2LC_{2L-1}^L \xi^{L-1} (1-\xi)^{L-1}. \quad (4)$$

Нехай функція $y(x)$ задана таблицями значень $y_i, x_i, i=1,2,\dots,k$. Для параметричного представлення вектор функції $r(t) = [x(t), y(t)]^T, t \in [0,1]$, задамо рівномірно розподілені по осі t вузлові точки з кроком $\Delta=1/(k+1)$ так, щоб $t_1 = \Delta, t_i = i\Delta, i=1, K, t_k = 1 - \Delta$. Точки, що обмежують i -й ділянку, помістимо в серединях сусідніх відрізків так, що $z_i = i\Delta - \Delta/2, i=1, K$.

Лінійний каркас, складений прямими лініями, що з'єднують задають точки, називаємо опорною кривою [7].

Запишемо апроксимуючий поліном на i -ій ділянці в вигляді

$$P_1(\xi) = (1-\xi)^{L+1} \sum_{k=0}^L \xi^k a_{ki} + \xi^{L+1} \sum_{k=0}^L (1-\xi)^k b_{ki}, \quad (5) \\ \xi = \frac{t-z_i}{\Delta}, \quad t \in [z_i, z_{i+1}], \quad \xi \in [0,1].$$

Коефіцієнти полінома визначимо з умов рівності полінома і всіх його похідних до порядку $L+1$ в граничних точках $t=z_i, t=z_{i+1}$, відповідним значенням для опорної кривої. Ці умови, отже, висувають вимоги в граничних точках рівності нулю похідних вище першого порядку [8]. При зазначених умовах коефіцієнти полінома на i -ій ділянці запишуться співвідношеннями

$$a_{ki} = \varepsilon_k [(L+k)(r_i + r_{i-1})/2 + k(r_i - r_{i-1})], \\ b_{ki} = \varepsilon_k [(L+k)(r_i + r_{i+1})/2 + k(r_i - r_{i+1})], \quad k = \overline{0, L},$$

а поліном – співвідношенням

$$P_i(\xi) = Lh_3(\xi)(r_i + r_{i-1})/2 + h_4(\xi)(3r_i - r_{i-1})/2 + Lh_1(\xi)(r_i + r_{i+1})/2 + h_2(\xi)(3r_i - r_{i+1})/2. \quad (5')$$

За допомогою (4) для апроксимуючого вектор-полінома і його першої та другої похідних для будь-якого $t \in [\Delta/2, 1 - \Delta/2]$ запишеться (5') у наступному вигляді

$$P_i(\xi) = (r_i + r_{i-1})/2 + \xi(r_i - r_{i-1}) + h(\xi)(r_{i-1} + r_{i+1} - 2r_i)/2, \quad P_i'(\xi) = (r_i - r_{i-1}) + h'(\xi)(r_{i-1} + r_{i+1} - 2r_i)/2, \\ P_i''(\xi) = h''(\xi)(r_{i-1} + r_{i+1} - 2r_i)/2, \quad (6) \\ i = \text{entier}[t(K+1) + 0,5], \quad \xi = t(K+1) - i + 0,5, \quad \xi \in [0,1].$$

Робочою областю визначення апроксимуючим полінома є $t \in [\Delta, 1 - \Delta]$.

На рис.1. представлена апроксимація точок кривої просторової поверхні.

Схема побудови апроксимації поверхні забезпечує безперервність апроксимуючого полінома в лініях перетину разом з усіма похідними аж до $2L+1$ -го порядку. Процедура побудови полінома не вимагає додаткової пам'яті комп'ютерних пристроїв (крім таблиць задають точок і біноміальних коефіцієнтів,

формули легко програмується).

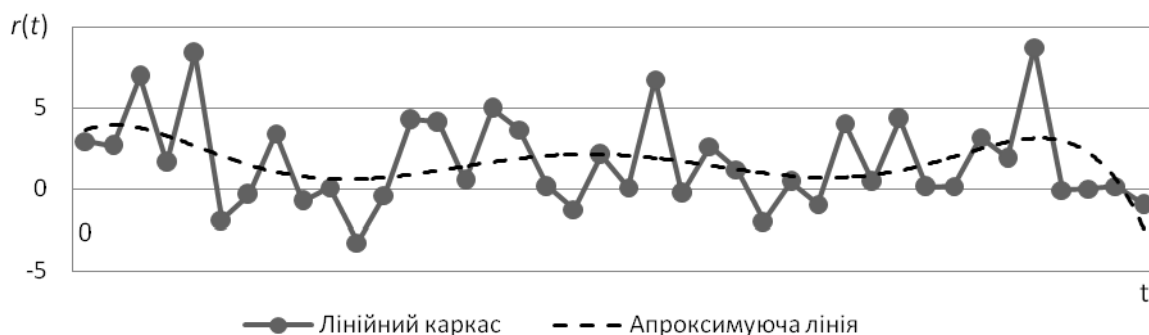


Рис. 1. Приклад апроксимації точок кривої просторової поверхні

Висновки

Розглянуто суміщення фізичного об'єкту вимірювання і його математичної моделі та. проведено оцінку суміщення контрольованої авіаційної деталі з її комп'ютерною та математичною моделлю. Одержано вираз для функції Лагранжа. Визначені значення лінійних і кутових зсувів, які складають вихідну інформацію для оператора-метролога трикоординатної вимірювальної системи з метою корекції системи координат фізичної моделі, що враховано в програмно-математичному забезпеченні систем автоматизованого проектування. Розроблений алгоритм автоматизованого суміщення контрольних об'єктів математичної моделі та об'єкту вимірювання. Розроблена методика побудови моделі об'єктів, яка базується на тривимірній поліноміальній апроксимації, яка забезпечує безперервність апроксимуючого полінома в лініях перетину разом з усіма похідними аж до $2L + 1$ -го порядку

Література

1. Анухин В.И. Допуски и посадки. Выбор и расчет, указание на чертежах: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп/ Анухин В.И. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 219 с.
2. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1988. 232 с.
3. Бутенко В. И. Технологическое обеспечение конкурентоспособности изделий авиационной техники (авторский курс) / Бутенко В. И. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 295 с.
4. Кавалеров Т.И. Введение в информационную теорию измерений.-М.: Энергия, 1974.-274 с.
5. Дунаев П. Ф. Расчет допусков размеров / П. Ф. Дунаев, О.П. Леликов. – М.: Машиностроение, 2001. – 304 с.
6. Ильицкий В.Б. Модель обеспечения качества сборочных единиц на основе анализа размерных связей / В.Б. Ильицкий, Е.А. Польский, Д.М. Филькин // СПРАВОЧНИК. Инженерный журнал. М.: Машиностроение, №4(157). 2010 – С. 51-56.
7. Мухин В.С. Расчет технологических размеров: учеб.пособие /Мухин В.С.– Уфа: УГАТУ, 2004. – 205с.
8. Польский Е. А. Модель комплексного анализа размерных связей для обеспечения точности сборочных соединений / Е. А. Польский, Д. М. Филькин // Известия ОрелГТУ. Серия «Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии». ОрелГТУ, Орел. №5/277 (576). 2009. С. 59-66.
9. Походун А. И. Экспериментальные методы исследований. Погрешности и неопределенности измерений: учеб.пособие. / Походун А. И. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 112 с.
10. Стовпюк Ф. С. Технология изделий из древесины. Расчет допусков: учеб.пособие по курсовому и дипломному проектированию / Стовпюк Ф. С. – Л.: ЛТА, 1986. – 80 с.

References

1. Anuhin V. I. Dopuski i posadki. Vybora i raschet, ukazanie na chertezhah: ucheb. posobie. 2-e izd., pererab. idop / Anuhin V. I. – SPb.: Izd-voSPbGTU, 2001. – 219 s.
2. Maksimej I.V. Imitacionnoe modelirovaniena JeVM. M.: Radio i svjaz', 1988. 232 s.
3. Butenko V. I. Tehnologicheskoe obespechenie konkurentosposobnosti izdelij aviacionnoj tehniki (avtorskiykurs) / Butenko V. I. – Taganrog: Izd-vo TTI JuFU, 2011. – 295 s.
4. KavaleroV T.I. Vvedenie v informacionnuju teoriju izmerenij. M.: Jenergija, 1974. 274 s.
5. Dunaev, P. F. Raschet dopuskov razmerov / P. F. Dunaev, O.P. Lelikov. – M.: Mashinostroenie, 2001. – 304 s.
6. Il'ickij, V. B. Model' obespechenija kachestva sborocnyh edinic na osnove analiza razmernih svyazej / V. B. Il'ickij, E. A. Pol'skij, D. M. Fil'kin // SPRAVOCHNIK. Inzhenernyj zhurnal. M.: Mashinostroenie, №4(157). 2010 – S. 51-56.
7. Muhin V. S. Raschet tehnologicheskikh razmerov: ucheb. posobie / Muhin V. S. – Ufa: UGATU, 2004. – 205s.
8. Pol'skij, E. A. Model' kompleksnogo analiza razmernih svyazej dlja obespechenija tochnosti sborocnyh soedinenij / E. A. Pol'skij, D. M. Fil'kin // Izvestija OrelGTU. Serija «Fundamental'nye i prikladnye problemytehniki i tehnologii».OrelGTU, Orel. №5/277 (576). 2009. S. 59-66.
9. Pohodun A. I. Jeksperimental'nye metody issledovanij. Pogreshnosti i neopredelennosti izmerenij: ucheb. posobie. / Pohodun A. I. – SPb: SPbGU ITMO, 2006. – 112 s.
10. Stovpjuk F. S. Tehnologija izdelij iz drevesyiny. Raschjot dopuskov: ucheb. Posobie po kursovomu i diplomnomu proektirovaniju / Stovpjuk F. S. – L.: LTA, 1986. – 80 s.