

УДК 539.3

Лупаренко Е.В.*

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
КОНЦЕНТРАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД
С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ**

Рассмотрено влияние соотношения упругих и геометрических параметров кусочно-неоднородной прямоугольной области на характер концентрации динамических напряжений в окрестности нерегулярных точек границы. Представлены данные численных расчетов спектра резонансных частот и коэффициентов концентрации напряжений в зависимости от соотношений жесткостей стыкуемых областей.

Важным этапом при численном решении задач теории упругости является определение характера поведения компонентов напряженно-деформированного состояния вблизи особых точек внешних и внутренних границ рассматриваемого тела, что позволяет при численном анализе наилучшим образом аппроксимировать решение и построить эффективный алгоритм его нахождения. Наиболее актуальной эта проблема является в задачах вибронагружения элементов конструкций, когда напряженное состояние может претерпевать качественные изменения в зависимости от частоты внешней нагрузки.

В работах [1 – 3] разработаны методы исследования волновых полей в упругих областях данной геометрии, использующие асимптотическое поведение общих решений в особых точках границы. Коэффициенты при особенностях в сингулярных слагаемых асимптотики решения исследовались в работах [1, 4] только для случая однородной прямоугольной области.

Задачей данной работы является исследование коэффициентов интенсивности напряжений, определяющих величину локальной особенности по напряжениям в нерегулярных точках границы конечной кусочно-неоднородной прямоугольной области.

В работах [2, 3] на основе модифицированного метода суперпозиции построено решение задачи об установившихся колебаниях составной кусочно-неоднородной области, которая в безразмерных координатах описывается неравенствами

$$D = G^{(1)} \cup G^{(2)} = \{(x, y) : |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\} \cup \{(\tilde{x}, y) : \tilde{x} \in [-\delta_2, 0] \cup [0, \delta_2]; |y| \leq \eta\}$$

Здесь x, y, \tilde{x} – отнесенные к a декартовы координаты в областях $G^{(m)}$, $\delta = c/a, \eta = b/a, \delta_2 = 1 - \delta, 2a \times 2b$ – размеры всей составной области, $2c \times 2b$ – размеры её внутренней части, $m = 1, 2$. Предполагается, что волновое поле возбуждается вибронагрузкой интенсивности q , гармонически изменяющейся во времени с частотой ω и приложенной к внешним границам составной области, а на границе контакта реализуются условия жесткого сцепления. Исследование проводится в рамках гипотез упругой плоской деформации.

Характер сингулярности волнового поля в угловой точке стыка областей $A(\delta, \eta)$ определяется параметром α , для определения которого в [3] получено характеристическое уравнение, корни которого зависят от отнесенных к модулю сдвига $\mu^{(m)}$ безразмерных упругих параметров $C_{ij}^{(m)}$ внутренней области $G^{(1)}$ и наплавков $G^{(2)}$ (верхний индекс определяет принадлежность соответствующей характеристики к области $G^{(m)}$, $m = 1, 2$). Если $0 < \alpha < 1$, то волновые характеристики терпят разрыв в точке A , если $\alpha \geq 1$ – разрыва нет. Например, асимптотическое исследование решения во внешней угловой точке $B(\delta_2, \eta)$, проведенное в

*ПГТУ, канд. техн. наук, доц.

[2, 3], позволяет утверждать, что перемещения и напряжения в этой точке даже в случае анизотропии материалов областей $G^{(m)}$ сохраняют непрерывность, что соответствует выводам работ [1, 5].

Предполагая закон изменения всех характеристик волнового поля в окрестности особой точки $A(\delta, \eta)$ известным [3], изучим количественные характеристики концентрации динамических напряжений в этой точке. Именно, предположим, что отнесенные к $\mu^{(m)}$ безразмерные амплитудные компоненты тензора напряжений в окрестности точки A изменяются по закону

$$\sigma_{ij}^{(1)} = A_{ij}^{(1)} ((\delta - x)^2 + (\eta - y)^2)^{(\alpha-1)/2}, \quad \sigma_{ij}^{(2)} = A_{ij}^{(2)} ((\tilde{x})^2 + (\eta - y)^2)^{(\alpha-1)/2}. \quad (1)$$

Множители $A_{ij}^{(m)}$, называемые в теории упругости коэффициентами при особенности, определяют, в конечном итоге, вместе с параметром α степень концентрации напряжений в окрестности угловой точки A . В дальнейшем остановимся на вопросе определения множителей $A_{ij}^{(m)}$.

В работе [3] построено приближенное решение $\sigma_{ij}^{(1)}(x, y), \sigma_{ij}^{(2)}(\tilde{x}, y)$, достаточно точно описывающее решение поставленной задачи вблизи особой точки A составной области, исключая зону ее предельной близости. В области $G^{(1)}$ исследуем поведение напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$ при стремлении к особой точке $A(\delta, \eta)$ по лучам, описываемых в выбранной системе координат уравнениями $y = k^{(1)}(x - \delta) + \eta$. В зоне предельной близости точки A , когда ряды для напряжений становятся медленно сходящимися, приравниваем полученные значения динамических напряжений выражениям (1) и определяем из полученных равенств константы $A_{ij}^{(1)}$. Изменяя значения угловых коэффициентов при условии $k^{(1)} \geq 0$, будем при разных значениях $k^{(1)}$ получать вдали от зоны предельной близости точки A различные значения констант при особенности $A_{ij}^{(1)}$. По мере приближения к точке A значения этих констант при различных значениях угловых коэффициентов будут сближаться. За их окончательные значения примем те, при которых имеет место гладкий переход от формул (1) к ранее построенному приближенному решению.

Аналогично поступаем при определении коэффициентов $A_{ij}^{(2)}$. В области $G^{(2)}$ стремление в приближенном решении к особой точке $A(0, \eta)$ осуществляем по лучам с уравнениями $y = k^{(2)}\tilde{x} + \eta$, изменяя угловые коэффициенты в области $k^{(2)} \leq 0$. В остальном поступаем аналогично предыдущему.

Изложенный прием определения множителей при нерегулярных слагаемых позволяет изучить их зависимость от соотношения упругих констант стыкуемых областей и от параметра частота $\Omega^{(1)} = \omega a / c_s^{(1)}$ ($c_s^{(1)}$ – скорость сдвиговых волн в области $G^{(1)}$).

В качестве параметров концентрации напряжений можно выбрать отношение напряжений, вычисляемых по формулам (1), к напряжениям $\sigma_{ij}^{(m0)}$, вычисленным в окрестности точки A для случая одинаковых материалов областей $G^{(m)}$ (в этом случае в точке A локальной особенности по напряжениям не возникает [6]).

$$K_{1\gamma} = \lim_{y \rightarrow \eta} \left| \sigma_{1\gamma}^{(1)}(\delta, y) / \sigma_{1\gamma}^{(10)}(\delta, y) \right|, \quad \gamma = 1, 2. \quad (2)$$

Следует отметить, что значение показателя особенности по напряжениям α в точке A не зависит от геометрических характеристик составной области [3, 5], а определяется лишь упругими параметрами $\mu^{(m)}, \nu^{(m)}$ ($\nu^{(m)}$ – коэффициент Пуассона материала области $G^{(m)}$), число которых может быть сокращено до двух [7]:

$$\alpha^* = \frac{\mu^{(2)}(1-\nu^{(1)}) - \mu^{(1)}(1-\nu^{(2)})}{\mu^{(2)}(1-\nu^{(1)}) + \mu^{(1)}(1-\nu^{(2)})}, \beta^* = \frac{\mu^{(2)}(1-\nu^{(1)}) - \mu^{(1)}(1-\nu^{(2)}) - 0,5(\mu^{(2)} - \mu^{(1)})}{\mu^{(2)}(1-\nu^{(1)}) + \mu^{(1)}(1-\nu^{(2)})}.$$

Если параметр Дандерса $D^* = \alpha^* (\alpha^* - 2\beta^*) \geq 0$ – в угловых точках возникает локальная особенность по напряжениям, и мы имеем один вещественный корень $0 < \alpha < 1$. Если $D^* < 0$ – особенности нет ($\alpha \geq 1$). В процессе проведения анализа были подсчитаны коэффициенты Дандерса для большинства сочетаний известных материалов и выделены пары материалов-концентраторов напряжений.

На рис. 1 сплошной линией представлена зависимость коэффициента концентрации K_{11} от частоты для пары материалов сталь-свинец ($D^* = 0,539$) при $\eta = 0,5$, $\delta = 0,7$.

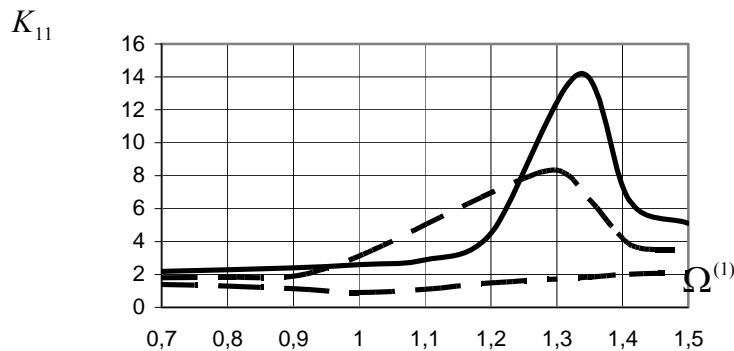


Рис. 1 – Зависимость коэффициента концентрации от частотного параметра

В окрестности частоты $\Omega^{(1)} = 1,330$ наблюдается довольно резкий скачок коэффициента концентрации, что объясняется возникновением интенсивных колебаний, локализованных в окрестности границы раздела областей. Подобные частоты естественно называть частотами граничного резонанса.

Величина максимума значения K_{11} существенно зависит от упругих свойств контактирующих материалов. Так, для пары материалов сталь – магний ($D^* = 0,231$) интенсивность колебаний на частоте граничного резонанса снижается (штриховая линия на рис. 1). При этом сама частота граничного резонанса несколько смещена по сравнению с предыдущим случаем, что связано с изменением параметров. Для обычных пар материалов скачок величины концентрации напряжений практически не наблюдается. На рис.1 штрихпунктирной линией обозначена зависимость $K_{11}(\Omega^{(1)})$ для пары материалов сталь-алюминий ($D^* = -0,003$).

Если геометрические параметры и материал внутренней области (сталь) оставить неизменными, а упругие параметры наплавов варьировать, приходим к данным рис. 2, где показана зависимость нормированного коэффициента концентрации K_{11} при особенности $\bar{A}_{11}^{(1)} = A_{11}^{(1)} / A_{11}^{(10)}$ ($A_{11}^{(10)}$ – коэффициент при особенности, соответствующий паре материалов сталь – сталь) от жесткостного параметра $r = \mu^{(2)} / \mu^{(1)}$ на первых трех резонансных частотах (кривые 1, 2, 3 соответственно). С увеличением значения r имеем рост $\bar{A}_{11}^{(1)}$ на всех частотах, однако на третьей резонансной частоте этот рост происходит гораздо быстрее, что свидетельствует в конечном итоге об интенсификации волновых движений на границе раздела сред.

Несомненный практический интерес представляет вопрос о влиянии на концентрацию напряжений толщины внешних наплавов. На рис. 3 представлена зависимость $K_{11}(\delta)$ при $\eta = 0,2$ для пар материалов сталь-свинец (кривая 1), сталь-магний (кривая 2) и сталь-алюминий (кривая 3). Расчеты проведены в окрестности третьей собственной частоты.

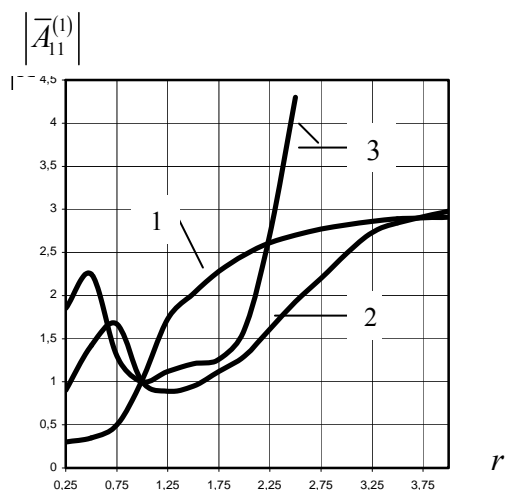


Рис. 2 – Зависимость коэффициента при особенности от параметра жесткости

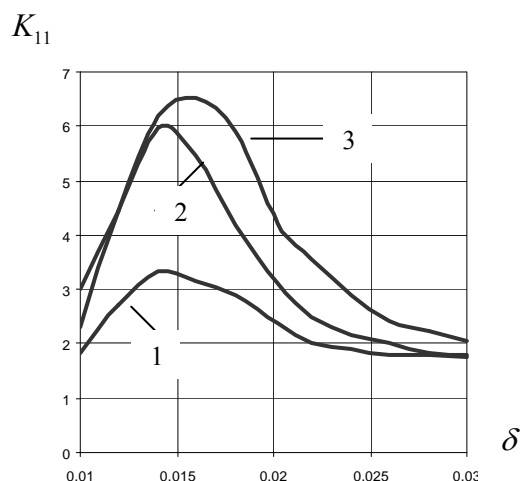


Рис. 3 – Зависимость коэффициента концентрации от размера внутренней области.

Из данных этого рисунка следует, что наиболее интенсивная концентрация напряжений наблюдается при значениях $0,012 \leq \delta \leq 0,020$. Однако, и в данном случае большое значение для каждой исследуемой пары материалов имеет учет значения параметра Дандерса D^* .

Данная методика исследования без принципиальных изменений может быть перенесена на случай кинематических граничных условий и другого вида условий сопряжения. В перспективе решение задачи о колебаниях анизотропных кусочно-однородных областей, где не существует аналогов параметра Дандерса, и показатель особенностей по напряжениям необходимо находить отдельно.

Выводы

Полученные результаты исследования коэффициентов концентрации позволяют подобрать геометрические и упругие параметры составной области для минимизации интенсивности волновых движений в окрестности раздела сред.

Перечень ссылок

1. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
2. Вовк Л.П. Численно-аналитический анализ вибродеформирования прямоугольных поперечно-неоднородных в плане деталей / Л.П. Вовк, Е.В. Лупаренко, Б.В. Соболь // Труды 6-й Междунар. научно-техн. конференции. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2001. – С. 76 – 82.
3. Вовк Л.П. Особенности гармонических колебаний кусочно-неоднородной прямоугольной области / Л.П. Вовк // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств.науки. – 2002. – № 4. – С. 9 – 13.
4. Белоконь А.В. Об установившихся колебаниях электроупругой пластины переменной толщины / А.В. Белоконь, Л.П. Вовк // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 101 – 105.
5. Лобода В.В. О контактном взаимодействии упругой прямоугольной пластины и полосы / В.В. Лобода // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25. – № 4. – С. 69 – 76.
6. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединённых вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора / Д. Боджи // Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1971. – Т. 38. – № 2. – С. 87 – 96.
7. Dundurs J. Discussion / J. Dundurs // Ibid. – 1969. – V. 36. – № 3. – P. 650 – 652.

Рецензент: Ю.Е. Коляда
д-р физ.-мат. наук, проф., ПГТУ

Статья поступила 27.03.2008