№ 2 (58) 2010
Вібрації в техніці та технологіях

Бранспиз Е. В.

Восточноукраинский национальный университет имени Владимира Даля

УДК 621.9.048

К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В КОНТЕЙНЕРЕ ВиО-СТАНКА

Рассмотрен процесс вибрационной абразивной обработки. Получены аналитические соотношения, которые связывают циркуляционную скорость гранул и обрабатываемых деталей с другими параметрами этого движения. Приведены аналитические зависимости для определения относительной и циркуляционной скорости элементов загрузки контейнера ВиО-станка.

In paper the process of vibration abrasive treatment It is shown. Analytical formulae which link circulation speed of granules and treated details with other parameters of this motion are got. Analytical dependences for determination of relative and circulation speed of load elements of VIO machine container are resulted.

«Определяющим фактором вибрационной обработки являются скорости осциллирующего движения абразивных частиц и деталей… Наличие горизонтальной составляющей скорости и вызываемый этим эффект транспортирования обеспечивают медленное вращательное движение всей среды…»

Шаинский М. Е.

В данной работе, являющейся обобщением результатов, полученных в [1], рассматривается математическая модель, позволяющая описать случайные движения элементов загрузки и обрабатываемых деталей в вибрирующем U-образном контейнере ВиО-станка. При разработке этой модели использованы методы статистической механики, которые позволяют описывать поведение системы из многих частиц, движущихся случайным образом. Основу этих методов составляет такая запись уравнений движения частиц системы, которая, в итоге, позволяет получить из уравнений классической механики для системы частиц решаемые кинетические уравнения статистической механики (соответствующая схема связи их между собой приведена на рис. 1).

Уравнения Ньютона для элементов загрузки в вибрирующем U-образном контейнере ВиО-станка (гранулы и обрабатываемые детали) включают в себя потенциальные силы (в поле тяжести) и силы, которые зависят от скоростей частиц системы (силы контактного взаимодействия между ними). Требование адекватности реальности получаемых в этом случае решений связано с необходимостью:

– строгого аналитического описания сил взаимодействия между частицами системы, что в нашем случае, например, не представляется осуществимым ввиду сложного характера динамического взаимодействия элементов загрузки при их движении в вибрирующем контейнере ВиО-станка;

– точного задания начальных условий (для координат и скоростей частиц системы), что в нашем случае также не представляется осуществимым ввиду разброса параметров элементов загрузки.

С учетом этого уравнения Ньютона для элементов загрузки в вибрирующем U-образном контейнере ВиО-станка должны быть преобразованы к виду, позволяющему получить требуемое решение. Первым этапом такого преобразования является переход к уравнениям Лагранжа (рис. 1), которые могут быть выведены из уравнений Ньютона введением в рассмотрение (формализм Лагранжа) энергетической характеристики многочастичной системы – лагранжиана. При этом многочастичная система должна быть дополнена потенциалом взаимодействия её частиц с внешней средой для того, чтобы совокупная система могла рассматриваться как консервативная.

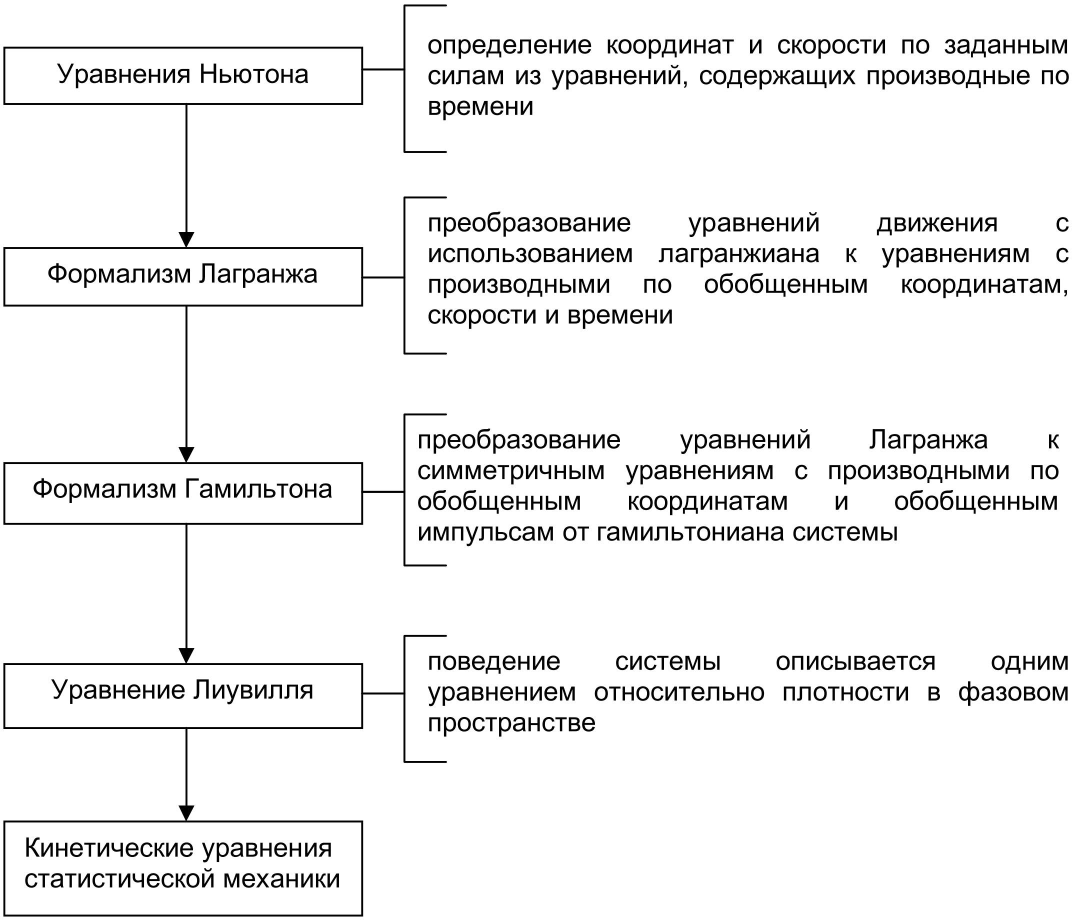

Рис. 1. Этапы преобразования уравнений классической механики к кинетическим уравнениям статистической механики

Описание такой консервативной системы уравнениями Лагранжа (их, как и уравнений Ньютона, столько, сколько содержится частиц в системе) дает возможность описания движения любой частицы системы единообразно для всей системы частиц. Ведь лагранжиан учитывает состояние системы в целом, хотя силы, действующие на различные частицы системы, могут и отличаться между собой (многочастичная система указанным выше способом должна быть приведена к виду консервативной системы). Сложность же реализации решения уравнений Лагранжа, обусловленная сложностью получения конкретного выражения для лагранжиана в рассматриваемом случае, не позволяет применить непосредственно эти уравнения для системы из элементов загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка.

Заметим, что в практике расчёта многозвенных механизмов уравнениям Лагранжа придают форму, пригодную для решения. С этой целью в случае большой жесткости звеньев и малого их веса по сравнению с внешними силами делают допущение о нулевом значении производной потенциальной энергии по обобщённой координате. Это позволяет записать уравнения Лагранжа как равенство комбинации производных для кинетической энергии (по обобщённой координате, скорости и времени) некоторой обобщенной силе, характеризующей реальные силы на многозвенный механизм. Поскольку кинетическая энергия многозвенного механизма, равная сумме кинетических энергий звеньев, легко формально записывается через скорость звеньев, то при заданных силах, воздействующих на многозвенный механизм, эти уравнения могут быть решены относительно скоростей звеньев. Однако необходимость получения однозначного результата связана в этом случае с использованием определённых начальных условий. То есть, для однозначного решения необходимо задавать определённое состояние системы, в нашем случае – состояние всех элементов загрузки в вибрирующем контейнере станка. Сделать это однозначно, с учётом реальных условий эксплуатации, не представляется возможным.

Кроме этого, трудную задачу представляет также в этом случае определение явного вида внешнего силового воздействия на каждый из элементов многозвенного механизма. В нашем случае эти трудности связаны с тем, что силовое воздействие стенок контейнера на элементы загрузки и одного элемента загрузки на другой, обусловленное ударом и трением поверхностей, имеет сложный неоднозначный характер.

Следующим этапом преобразования уравнений классической механики для многочастичных систем к кинетическим уравнениям является преобразование к уравнениям Гамильтона (рис. 1). Они характерны тем, что движение отдельной частицы системы описывается не одним дифференциальным уравнением второго порядка, а двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. Эти уравнения включают в себя производные гамильтониана (энергетическая характеристика системы) по обобщённой координате и обобщённому импульсу частицы.

В совокупности (по всем частицам многочастичной системы) уравнения Гамильтона представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому значения всех переменных, входящих в эти уравнения (обобщенные координаты и импульс всех частиц), полностью определяются в любой момент времени значениями этих переменных в некоторый начальный момент времени. Такое свойство уравнения Гамильтона позволяет ввести геометрически наглядное изображение многочастичной системы в пространстве, координаты которого есть указанные переменные, – фазовое пространство. Изменение же состояния системы (движение частиц многочастичной системы) представляет собой перемещение точки в фазовом пространстве по некоторой траектории.

В силу того, что для любой многочастичной системы начальные условия движения неоднозначны, неоднозначными будут и фазовые траектории. Утверждение о неоднозначности начальных условий для любой многочастичной и любой другой системы основано, как это можно выявить из обычно неявных замечаний в соответствующих публикациях, на следующем:

– при рассмотрении любой системы её объекты идеализируются определенным образом, а, следовательно, те начальные условия, которые применяются для идеализированных объектов, не могут строго точно соответствовать тем, которые на самом деле реализуются в системе;

– любые начальные условия могут быть заданы хоть и со сколь угодно большой, но все же конечной точностью.

Неоднозначность начальных условий обусловливает необходимость рассмотрения одной и той же системы для начальных условий из некоторого диапазона всех возможных их значений. Это приводит к необходимости рассмотрения совокупности фазовых траекторий, соответствующих динамике системы при определенных начальных условиях. При этом число таких фазовых траекторий является бесконечным, поскольку начальные точки каждой из фазовых траекторий – дифференциальные объекты, плотно заполняющие весь диапазон допустимых значений начальных условий. В результате задача описания динамики многочастичной системы при неоднозначных начальных условиях приводится к задаче описания динамики бесконечно большого числа идентичных между собой, но отличающихся начальными условиями систем.

Поскольку фазовые траектории для каждой из систем фазового ансамбля заполняют некоторую область фазового пространства, то для характеристики этой области удобно ввести в рассмотрение функцию плотности в фазовом пространстве, определяющую число точек различных фазовых траекторий в дифференциальной окрестности некоторой данной точки фазового пространства. При этом данная точка фазового пространства характеризует определенное состояние многочастичной системы, функция же плотности характеризует то, как часто это состояние достигается системами из фазового ансамбля. Надо заметить, что каждая точка фазового пространства соответствует лишь одной строго определенной фазовой траектории, задаваемой соответствующим начальным условием. Однако через дифференциальную окрестность различных точек фазового пространства может пройти различное число фазовых траекторий, количество которых соответствует (конечно, с точностью, определяемой размером дифференциальной области вокруг точки, – состояние) числу систем из фазового ансамбля, которые достигли (приблизительно) соответствующего состояния.

Формализм Гамильтона позволяет при этом вывести уравнение Лиувилля (рис. 1), которому подчиняется функция плотности в фазовом пространстве, что связано с определенными условиями:

– взаимодействия в системе не должны зависеть от скоростей взаимодействующих элементов системы, эти взаимодействия должны быть потенциальными, а не диссипативными (рассеивающими энергию);

– рассматриваемая система многих частиц должна быть замкнутой.

Последнее условие легко удовлетворить, расширяя понятие системы так, как это уже указывалось выше (к рассматриваемой системе следует добавить внешнюю, объединив обе системы в одну). Но условие отсутствия взаимодействия в системе не зависящих от скорости частиц системы для рассматриваемой здесь системы не может быть принято из-за существенного несоответствия реальности. Как следствие, для многих реальных механических систем, в которых действуют диссипативные силы и есть зависящие от скорости внешние воздействия, уравнения Гамильтона непосредственно неприменимы (на внешние воздействия указано в связи с тем, что любая данная система и некоторая внешняя к ней могут рассматриваться как одна система).

Однако формализм Гамильтона (рассмотрение поведения системы в координатах фазового пространства) позволяет удобно описывать многочастичную систему и в случае сил (внешних или взаимодействия), зависящих от скоростей частиц системы. В частности, и в этом случае имеет место понятие плотности в фазовом пространстве. Только в этом случае вместо уравнения Лиувилля имеет место уравнение неразрывности в фазовом пространстве. В обоих случаях точки фазового пространства, для которых функция фазовой плотности максимальна, соответствуют наиболее вероятному состоянию системы.

То есть в обоих случаях возможен переход к статистическому описанию системы из множества взаимодействующих частиц, подверженной (или не подверженной в случае замкнутости системы) внешнему воздействию (в общем случае – произвольному).

Последнее означает сведение задачи по детерминистскому решению уравнений классической механики для многочастичной системы к задаче определения наиболее вероятной траектории этой системы в фазовом пространстве. При этом вероятность любой выделенной точки фазовой траектории (то есть вероятность иметь системой соответствующее этой точке состояние) есть относительное число систем из фазового ансамбля с координатами фазового пространства (пространственные координаты частиц и их импульсы), которые близки (по дифференциальным масштабам) координатам этой выделенной точки фазовой траектории.

Указанная вероятность соответствует классическому определению вероятности как отношения благоприятных исходов события (в нашем случае – это все фазовые траектории, попавшие в дифференциальную окрестность данной точки) ко всем возможным исходам этого события (в нашем случае – это фазовые траектории всего фазового ансамбля).

Фазовую плотность можно также интерпретировать как частотную вероятность. А именно, как предел, к которому в мысленных опытах при варьировании начальных условий стремится отношение числа фазовых траекторий, прошедших через дифференциальную окрестность данной точки фазового пространства к общему числу всех траекторий в указанных мысленных опытах.

Таким образом, использование функций плотности вероятности позволяет перейти от детерминированного описания системы многих частиц (многоэлементной системы) к описанию поведения этой системы в среднем (статистически). Причем, соответствующая такому описанию функция плотности вероятности (частотной, статистической) и функция плотности в фазовом пространстве связаны между собой некоторой константой. Поэтому обе эти функции удовлетворяют одному уравнению. При этом, в случае замкнутой системы с потенциальной составляющей в гамильтониане системы таким уравнением является уравнение Лиувилля, от которого можно перейти уже к определённым кинетическим уравнениям относительно функции плотности вероятности, если задан характер потенциального взаимодействия частиц системы (рис. 1).

Указанное уравнение Лиувилля – равенство нулю полной производной по времени для функции плотности вероятности – хотя и записывается математически проще, чем уравнения механики для многочастичных систем при использовании формализма Лагранжа или формализма Гамильтона, но по сложности решения эквивалентно этим уравнениям. Однако смысл введения в рассмотрение этого уравнения заключается не в прямом его решении, которое в общем случае – трудная задача (для отдельных систем, впрочем, решение уравнения Лиувилля известно). Этот смысл заключается в возможности указанного перехода от уравнения Лиувилля к относительно легко решаемым кинетическим уравнениям, содержащим меньшее число переменных.

В частности, общей основой является статистическое описание движений, когда рассматриваются не абсолютные значения динамических или кинематических параметров элементов системы, а их вероятности, средние значения и среднеквадратичные отклонения. Это статистическое описание позволяет получить соответствующие статистические закономерности для средних параметров.

Если учесть, что движение элементов загрузки вибрирующего контейнера происходит в поле силы тяжести, то любая гранула рабочей среды (рабочее тело) и любая деталь (далее будем называть рабочие тела и детали «тело-представитель») в своем движении могут быть описаны общим уравнением по второму закону динамики Ньютона

$$m \cdot \frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F}_{вз} + \overline{P}\,, \qquad (1)$$

где m – масса «тела-представителя»; $\overline{V}$ – скорость «тела-представителя» в лабораторной системе координат; $\overline{F}_{вз}$ – сила воздействия на рассматриваемое «тело-представитель» со стороны среды, которая находится в рабочем контейнере ВиО-станка (детали и рабочие тела); $\overline{P}$ – сила тяжести, равная $m \cdot g$ (здесь g – ускорение свободного падения).

Запись уравнения (1) соответствует тому, что обрабатываемые детали и рабочие тела, находясь в поле силы тяжести, испытывают дополнительное силовое воздействие, которое является результатом их взаимодействия между собой при движении загрузки рабочего контейнера под воздействием ее вибрации. Отметим, что и для детали и для рабочего тела это взаимодействие обусловлено воздействием на них всех элементов загрузки («тела-представители»), с которыми они входят в контакт при своем движении. Если деталь и рабочее тело находятся возле стенки рабочего контейнера, то на них воздействуют не только окружающие элементы загрузки, но и сама стенка. Однако сила этого воздействия может быть включена в силу $\overline{F}_{вз}$ как внешняя сила, поэтому уравнение (1) в самом деле является общим уравнением, действительным для любого «тела – представителя».

Согласно уравнению (1), особенности движения рабочего тела и обрабатываемой детали полностью определяются особенностями силы взаимодействия $\overline{F}_{вз}$ «тела-представителя» с элементами загрузки вибрирующего контейнера (далее называемых «среда-загрузка») и его стенками.

Поскольку взаимодействия, которые соответствуют этой силе, носят очевидный случайный характер, то особенности рассматриваемых движений «тел-представителей» можно выявить и описать сами эти движения лишь при учете случайного характера силы $\overline{F}_{вз}$.

Далее, поскольку не только прямое решение уравнения (1), но и анализ его не представляются возможными из-за случайного характера силы $\overline{F}_{вз}$, то осуществим преобразование этого уравнения к виду, позволяющему:

– осуществить анализ его в случае движения загрузки вибрирующего контейнера;

– стать основой для получения решения, имеющего практическую ценность.

Для уравнений динамики со случайными составляющими силы в нем такое преобразование можно осуществить, выделив в силе $\overline{F}_{вз}$ некоторую среднюю составляющую, являющуюся детерминированной величиной. Тогда очевидно, что случайность силы $\overline{F}_{вз}$ будет определяться добавлением к средней составляющей силы $\overline{F}_{вз}$ (обозначим эту среднюю составляющую как $\left\langle \overline{F}_{д} \right\rangle$) некоторой случайной составляющей силы (обозначим ее $\left\{ \overline{F}_{сл} \right\}$). То есть примем для $\overline{F}_{вз}$ разложение

$$\overline{F}_{вз} = \left\langle \overline{F}_{д} \right\rangle + \left\{ \overline{F}_{сл} \right\}. \qquad (2)$$

Тогда, подставляя (2) в (1), получим следующее уравнение

$$m \cdot \frac{d\overline{V}}{dt} = \left\langle \overline{F}_{д} \right\rangle + \overline{P} + \left\{ \overline{F}_{сл} \right\}. \qquad (3)$$

Уравнение (3), ввиду наличия в нем выделенной случайной компоненты $\left\{ \overline{F}_{сл} \right\}$, есть уравнение Ланжевена.

Можно утверждать, что, соответственно смыслу понятия среднего случайной величины (случайные отклонения от среднего равны в среднем нулю), случайные отклонения от средней силы $\left\langle \overline{F}_{д} \right\rangle$ в среднем равны нулю. То есть, в среднем равна нулю будет и случайная составляющая силы $\left\{ \overline{F}_{сл} \right\}$.

Последнее, впрочем, не означает, что этой составляющей можно пренебрегать. Именно наличие и учет ее в уравнении динамики отличает это уравнение по содержанию и решению от уравнения Ньютона с детерминированными силами.

Очевидно, что характер движения, описываемого уравнением Ланжевена (3), полностью определяется характером правой части этого уравнения. Входящая в эту правую часть сила $\overline{P}$ является известной постоянной силой. Известной по свойству равенства в среднем нулю является и сила $\{\overline{F}_{сл}\}$. Что же касается свойств и характера силы $\langle\overline{F}_{д}\rangle$, то для возможности использования уравнения (3) при анализе движения «тела-представителя» в «среде-загрузке» их необходимо установить.

С этой целью отметим, что именно эти взаимодействия обусловливают:

– перенос «тела-представителя» вместе со всей массой элементов «среды-загрузки» с некоторой средней скоростью, являющейся циркуляционной скоростью загрузки;

– обработку поверхности детали абразивной поверхностью рабочих гранул.

Особенностью рассматриваемых взаимодействий является то, что они обусловлены периодическим подводом энергии к «среде-загрузке» от стенок вибрирующего контейнера и перераспределением ее между элементами «среды-загрузки». Соответственно этому рассматриваемые взаимодействия можно разбить на следующие две группы:

– ускоряющие, в результате которых «тело-представитель» получает кинетическую энергию от элементов «среды-загрузки»;

– тормозящие, связанные с передачей кинетической энергии от «тела-представителя» соседним элементам «среды-загрузки».

Для взаимодействий первой группы характерным является то, что в нем «тело-представитель» взаимодействует с элементами загрузки, находящимися сзади (по ходу движения) от него. Что же касается взаимодействий второй группы, то они обусловлены взаимодействиями «тела-представителя» с элементами загрузки, находящимися спереди (по ходу движения от него). В обоих случаях соответствующие силовые взаимодействия обусловлены отличием скорости «тела-представителя» от скорости элементов «среды-загрузки».

Это отличие можно охарактеризовать наличием у «тела-представителя» некоторой относительной скорости – скорости «тела-представителя» относительно элементов «среды-загрузки» в системе координат, связанной с элементами «среды-загрузки». Она равна по модулю, но противоположна по знаку скорости элементов загрузки относительно «тела-представителя» в системе координат, связанной с этим телом.

Соответственно такой обусловленности и ускоряющих и тормозящих взаимодействий относительной скоростью (обозначим ее $\overline{V}_{отн}$) можно допустить, что эти взаимодействия связаны функционально с этой скоростью некоторой зависимостью. При этом, если ускоряющим взаимодействиям поставить в соответствие некоторую силу $\overline{F}_{уск}$, то в первом приближении можно принять, что эта сила пропорциональна скорости $\overline{V}_{отн}$. В самом деле, ускоряющие взаимодействия будут тем больше, чем больше скорость элементов «среды-загрузки» относительно «тела-представителя», равная, как указано выше, относительной скорости. В случае же равенства скоростей «тела-представителя» и элементов «среды-загрузки» (относительная скорость $\overline{V}_{отн}$ равна нулю), ускоряющее взаимодействие (как, впрочем, и тормозящее) будет отсутствовать.

То есть, в первом приближении можно принять, что

$$\overline{F}_{уск} = K_{уск} \cdot \overline{V}_{отн}, \qquad (4)$$

где $K_{уск}$ – некоторый коэффициент пропорциональности.

Аналогично для тормозящего взаимодействия можно принять, что сила, соответствующая этому взаимодействию (обозначим ее $\overline{F}_{торм}$), также прямо пропорциональна относительной скорости $\overline{V}_{отн}$. А именно

$$\overline{F}_{уск} = -K_{торм} \cdot \overline{V}_{отн}, \qquad (5)$$

где $K_{торм}$ – некоторый коэффициент пропорциональности, а знак «-» означает, что сила $\overline{F}_{торм}$ направлена противоположно движению «тела-представителя».

Соответственно этому силу $\overline{F}_{вз}$ можно записать как сумму

$$\overline{F}_{вз} = \overline{F}_{уск} + \overline{F}_{торм},$$

что, с учетом (4) и (5), позволяет записать для нее

$$\overline{F}_{вз} = \left(K_{уск} - K_{торм}\right) \cdot \overline{V}_{отн}. \qquad (6)$$

Далее, поскольку сила $\langle\overline{F}_{д}\rangle$ есть детерминированная часть силы $\overline{F}_{вз}$ (среднее значение), то, согласно (6), сила $\langle\overline{F}_{д}\rangle$ – это среднее значение следующего выражения $\left(\mathrm{K}_{\text{уск}} - \mathrm{K}_{\text{торм}}\right) \cdot \overline{\mathrm{V}}_{\text{отн}}$.

Тогда, обозначив среднее значение разности $\left(\mathrm{K}_{\text{уск}} - \mathrm{K}_{\text{торм}}\right)$ как $\mathrm{K}_{\text{ср}}$, а среднее значение относительной скорости – $\left\langle \overline{\mathrm{V}}_{\text{отн}} \right\rangle$, для силы $\left\langle \overline{\mathrm{F}}_{\text{д}} \right\rangle$ получим выражение

$$\left\langle \overline{\mathrm{F}}_{\text{д}} \right\rangle = \mathrm{K}_{\text{ср}} \cdot \left\langle \overline{\mathrm{V}}_{\text{отн}} \right\rangle, \qquad (7)$$

определяющее физическое содержание силового взаимодействия «тела-представителя» с элементами «среды-загрузки» в рассматриваемом случае.

Подстановка соотношения (7) в уравнение Ланжевена (3) позволяет записать это уравнение в виде

$$\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{V}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{K}_{\text{ср}} \cdot \left\langle \overline{\mathrm{V}}_{\text{отн}} \right\rangle + \overline{\mathrm{P}} + \left\{ \overline{\mathrm{F}}_{\text{сл}} \right\}. \qquad (8)$$

Если теперь ввести удельные (на единицу массы) значения для коэффициента $\mathrm{k}_{\text{ср}}$ и силы $\left\{ \overline{\mathrm{F}}_{\text{сл}} \right\}$, а именно: $\mathrm{k}_{\text{ср}} = \mathrm{K}_{\text{ср}} / \mathrm{m}$ и $\mathrm{f}_{\text{сл}} = \left\{ \overline{\mathrm{F}}_{\text{сл}} \right\} / \mathrm{m}$, и учесть, что $\mathrm{g} = \mathrm{P} / \mathrm{m}$, то уравнение (8) можно привести к следующему виду:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{V}}}{\mathrm{dt}} = \overline{\mathrm{g}} + \mathrm{k}_{\text{ср}} \cdot \left\langle \mathrm{V}_{\text{отн}} \right\rangle + \overline{\mathrm{f}}_{\text{сл}}, \qquad (9)$$

представляющее собой уравнение Ланжевена для «тела-представителя».

В общем случае принимаем, что процесс случайного блуждания за большие промежутки времени приводит к перемещению модельного тела в положительном направлении оси х-ов. Причем это перемещение обусловливается воздействием на модельное тело некоторой силы f, направленной в положительную сторону по оси х-ов. Само же движение модельного тела в процессе случайного блуждания представляет собой случайное попадание модельного тела в некоторый момент времени в некоторую точку оси х-ов.

Пусть модельное тело в некоторый момент времени t находится в интервале длиной dx, со средним x_0. Тогда блуждание частицы будет заключаться в том, что через некоторое время $\Delta t = \tau$ после попадания модельного тела в указанный интервал модельное тело может переместиться из этого интервала вправо или влево по оси х-ов или остаться на месте в этом интервале.

Эта общая схема случайного блуждания может быть представлена как дискретная схема блуждания модельного тела по регулярным точкам оси х-ов, расположенных на расстоянии h друг от друга. Переход из некоторой точки с координатой x_0 (за нее естественно принять именно координату середины интервала dx, как середину соответствующей точки) возможен лишь в соседние точки с координатами $x_0 - h$ и $x_0 + h$ (сам переход осуществляется при этом за время $\Delta t = \tau$).

Согласно изложенному, процесс случайного блуждания модельного тела заключается в следующем: если модельное тело в некоторый момент времени t попало в точку с координатой x_0, то в момент времени $t + \tau$ модельное тело может оказаться в точке с координатой или $x_0 - h$, или x_0, или $x_0 + h$ (это координаты середин соответствующих интервалов размером dx).

Процесс случайного блуждания по регулярным дискретным точкам оси блуждания, чтобы вполне соответствовать в целом непрерывному движению «тела-представителя», должен, в конечном итоге, рассматриваться для предельных значений параметров процесса блуждания h и τ, – то есть, когда значения этих параметров стремятся к нулю.

Указанный предельный переход от дискретного к непрерывному описанию процесса случайного блуждания должен учитывать конкретные условия движения «тела-представителя». Это позволяет установить соответствующий движению «тела-представителя» физический смысл констант, входящих в получающееся при этом дифференциальное уравнение для процесса случайного блуждания.

Впрочем, повторимся: ввиду возможности установления соответствия между параметрами процесса случайного блуждания и параметрами движения «тела-представителя» несколькими различными способами, возможно описание процесса случайного блуждания разными уравнениями. Это приводит к необходимости решать задачу выбора одного уравнения и одной какой-либо модели процесса случайного блуждания, максимально адекватной исходному движению «тела-представителя».

Если переходу из точки в точку в процессе случайного блуждания сопоставить некоторую вероятность этого перехода, то, соответственно принятому характеру случайного блуждания, можно выделить следующие такие вероятности:

$\alpha(x_0)$ – вероятность перехода модельного тела из точки, имеющей координату x_0, в точку с координатой x_0+h;

$\beta(x_0)$ – вероятность перехода модельного тела из точки, имеющей координату x_0, в точку с координатой x_0-h;

$\sigma(x_0)$ – вероятность остаться модельному телу в точке с координатой x_0 после попадания в эту точку.

В общем случае указанные вероятности перехода могут зависеть от момента времени соответствующего перехода. Однако для дальнейшего принимаем, что такой зависимости от времени для переходных вероятностей нет. Последнее означает то, что, в какой бы момент времени модельное тело ни пришло в точку с координатой x_0, его поведение, определяемое вероятностями $\alpha(x_0)$, $\beta(x_0)$ и $\sigma(x_0)$, будет одним и тем же для любого момента времени. То есть, рассматриваемый процесс блуждания представляет собой процесс, который как бы не имеет «памяти», являясь, таким образом, марковским вероятностным процессом.

Согласно принятой общей схеме процесса случайного блуждания модельное тело, попав в некоторый момент времени в некоторую точку на оси блуждания, в следующий момент времени обязательно или уйдет из этой точки, или останется в ней. Последнее (уход из точки или остановка в ней) представляет собой достоверное событие, вероятность которого равна 1. Эта вероятность равна, очевидно, сумме вероятностей всех частных событий, составляющих в совокупности указанное достоверное событие. Поскольку вероятности частных событий в данном случае есть переходные вероятности, то, учитывая сказанное, можно записать следующее тождество:

$$\alpha(x_0)+\beta(x_0)+\sigma(x_0)=1\,, \qquad (10)$$

первое из которых относится к процессу случайного блуждания с переходными вероятностями, зависящими от времени, а второе – к процессу случайного блуждания, являющемуся марковским процессом.

Соответственно идее вероятностного подхода при описании процесса случайного блуждания будем рассматривать вероятность обнаружить модельное тело в некоторый момент времени в некоторой точке оси, по которой происходит процесс блуждания.

А именно, обозначим: $P(x_0, t+\tau)$ – вероятность обнаружить частицу в момент времени $t+\tau$ в интервале dx со средним x_0; $P(x_0-h, t)$ – вероятность обнаружить частицу в момент времени t в интервале dx со средним x_0-h; $P(x_0+h, t)$ – вероятность обнаружить частицу в момент времени t в интервале dx со средним x_0+h.

Эти вероятности, используя введенные выше переходные вероятности, легко связать между собой в одно алгебраическое выражение, исходя из следующего:

– для того, чтобы модельное тело в момент времени $t+\tau$ попало в точку с координатой x_0 (будем оперировать средними значениями интервалов), оно должно попасть в предыдущий момент времени (то есть в момент времени t) в точки с координатами $x_0\pm h$ (принято, что перемещение в некоторую данную точку происходит из соседних с нею точек), а затем переместиться в точку с координатой x_0;

– для того, чтобы модельное тело в момент времени $t+\tau$ находилось в точке с координатой x_0, в предыдущий момент оно должно попасть в точку с координатой x_0, а затем оно должно остаться на месте с вероятностью $\sigma(x_0)$, не сдвинувшись никуда за время τ.

То есть, согласно изложенному, можно записать равенство

$$P(x_0, t+\tau) = P(x_0, t)\cdot\sigma(x_0) + \\ + P_0(x_0+h, t)\cdot\beta(x_0+h) + \\ + P(x_0-h, t)\cdot\alpha(x_0-h)\,. \qquad (11)$$

которое, связывая между собой соответствующие вероятности, и представляет уравнение Чепмена-Колмогорова.

Таким образом, каждому отрезку оси блуждания можно поставить в соответствие некоторое число, называемое вероятностью попадания случайной величины на этот отрезок. Причем, эта вероятность может рассматриваться как некоторая мера соответствующего отрезка оси блуждания (мера всей оси блуждания равна 1). То есть мера любого интервала на оси блуждания есть вероятность того, что случайная величина попадает в этот интервал.

Как следствие, вероятности $P(x_0, t+\tau)$, $P(x_0-h, t)$ и $P(x_0+h, t)$ представляют собой дифференциально-малые величины, порядок малости которых определяется порядком малости размера точки блуждания dx.

Последнее затрудняет практическое использование равенства (11) как уравнения, решение которого должно дать возможность описывать процесс случайного блуждания.

Поэтому с целью преобразования равенства (11), дающего возможность перевести его к удобному для практического использования виду, перейдем в этом равенстве от функции вероятности к функции плотности вероятности на основе соотношения

$$P(x,t)=\rho(x,t)\cdot dx \quad , \qquad (12)$$

использование которого позволяет записать вместо (11) следующее равенство

$$\rho(x_0,t+\tau)=\rho(x_0,t)\cdot\sigma(x_0)+ +\rho(x_0+h,t)\cdot\beta(x_0+h)+ +\rho(x_0-h)\cdot\alpha(x_0-h), \qquad (13)$$

где $\rho(x_0,t+\tau)$, $\rho(x_0-h,t)$ и $\rho(x_0+h,t)$ – плотности вероятностей $P(x_0,t+\tau)$, $P(x_0-h,t)$ и $P(x_0+h,t)$ – задаваемые соответственно функции плотности вероятности $\rho(x,t)$.

Целью дальнейшего является получение на основе равенства (13) разрешимого дифференциального уравнения. Для этого, очевидно, в равенстве (13) достаточно воспользоваться разложениями в ряд Тейлора для всех функций плотности вероятности, входящих в это равенство. Такое разложение дает выражение

$$\rho(x,t)+\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}\cdot\tau+\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial t^2}\cdot\frac{\tau^2}{2!}+ +\ldots\frac{\partial^n\rho(x,t)}{\partial t^n}\cdot\frac{\tau^n}{n!}+\ldots= =\sigma(x)\cdot\rho(x,t)+\beta(x)\cdot\rho(x,t)+ +h\cdot\frac{\partial(\beta\rho)}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial(\beta\rho)}{\partial x}+\ldots \ldots+\alpha(x)\cdot\rho(x,t)-h\frac{\partial(\alpha\rho)}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2(\alpha\rho)}{\partial x^2}-\ldots, \qquad (14)$$

при записи которого учтено, что:

– координата произвольной точки на оси блуждания, обозначаемая выше как x_0, может быть обозначена как координата x, которая, конечно, принимает только значения, соответствующие координатам регулярных точек на оси блуждания, отстоящих друг от друга на расстояние h;

– произведения $\rho(x_0+h,t)\cdot\beta(x_0+h)$ и $\rho(x_0-h)\cdot\alpha(x_0-h)$ могут рассматриваться как некоторые функции координаты x, относительно которых и проведено разложение в ряд Тейлора (эти функции обозначены $\alpha\rho$ и $\beta\rho$).

Несложная группировка слагаемых в выражении (14) и деление правой и левой части его на интервал τ позволяют получить следующее равенство

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+\ldots=\rho(x,t)\cdot\frac{\alpha(x)+\beta(x)+\sigma(x)-1}{\tau}- -\frac{h}{\tau}\cdot\frac{\partial\rho(\alpha-\beta)}{\partial x}+\frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2\rho(\alpha+\beta)}{\partial x^2}-\ldots,$$

которое, с учетом (10), может быть записано в виде уравнения

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+\frac{\tau}{2!}\cdot\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial t^2}\ldots= =-\frac{h}{\tau}\cdot\frac{\partial\rho(\alpha-\beta)}{\partial x}+\frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2\rho(\alpha+\beta)}{\partial x^2}-\ldots, \qquad (15)$$

которое может рассматриваться как самое общее уравнение процесса случайного одномерного блуждания на прямой.

Указанная общность означает, что уравнение (15) имеет место как в случае зависимости переходных вероятностей от времени, так и в случае их зависимости только от координаты x.

Уравнение (15), полученное выше, представляет собой дифференциальное уравнение для функции плотности вероятности $\rho(x,t)$, порядок которого определяется порядком старшей производной по времени и координате. В самом общем случае этот порядок равен бесконечности, что, конечно же, не позволяет решать указанное уравнение в самом общем случае.

Очевидно, что для преобразования (15) к виду, пригодному для решения, необходимо ограничить число слагаемых в правой и левой его частях. Для этого учтем условия, конкретизирующие модель случайного одномерного блуждания. Эти условия, как условия движения для модельного тела, разумеется, связаны с условиями движения «тела-представителя».

Одним из таких условий является условие малости интервала τ. Применение этого условия к левой части уравнения (15) позволяет пренебречь всеми слагаемыми по сравнению с первым слагаемым. Именно малость второго и следующих слагаемых в левой части уравнения (15) в сравнении с первым слагаемым определяют соответствующий критерий малости для интервала времени τ.

Таким образом, уравнение (15) можно переписать к виду

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=$$

$$=-\frac{h}{\tau}\cdot\frac{\partial\rho(\alpha-\beta)}{\partial x}+\frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2\rho(\alpha+\beta)}{\partial x^2}-..., \quad (16)$$

который уже не содержит бесконечного числа слагаемых в левой части.

Что же касается правой части уравнения (16), содержащего бесконечное число слагаемых, то ограничение этого числа связано, очевидно, с установлением взаимосвязи между параметрами h и τ рассматриваемого процесса случайного блуждания модельного тела, которая, конечно же, должна соответствовать характеру движения «тела-представителя». Основным при этом является учет того, что движение «тела-представителя» имеет конечные по величине кинематические и динамические характеристики. Указанная конечность обусловливает и конечность тех уравнений, которыми описывается движение «тела-представителя». Как следствие, и уравнение (16) для описания процесса случайного одномерного блуждания модельного тела не должно содержать бесконечных по величине слагаемых.

Из вида уравнения (16) следует, что, обеспечив определенное соотношение между параметрами h и τ, можно обеспечить отсутствие в этом уравнении бесконечных по величине слагаемых. Причем, если для параметра τ принять определенную степень малости, то соответствующее соотношение должно определять степень малости параметра h в сравнении со степенью малости параметра τ.

В связи с этим учтем следующее. Степень малости интервала времени τ не может быть равной степени малости величины h^n, где n ≥ 3. В самом деле:

– если принять указанную степень малости для параметра τ, то в правой части уравнения (16) конечным будет лишь слагаемое с порядком производной, соответствующим принятому значению n ≥ 3;

– все остальные слагаемые, которые имеют большее, чем принятое, значение n, будут много меньше слагаемого с принятым значением n;

– слагаемые же с меньшим значением n, чем принятое значение, будут бесконечно большими для четных значений порядка производных.

Приведенный анализ дан с учетом того, что процесс случайного блуждания по регулярным дискретным точкам оси блуждания, чтобы вполне соответствовать в целом непрерывному движению «тела-представителя», должен рассматриваться для предельных значений параметров процесса блуждания h и τ, когда значения этих параметров стремятся к нулю. Именно соответствующий предельный переход ($h\to 0$ и $\tau\to 0$) позволяет избавиться от бесконечного числа слагаемых в уравнении (16).

Согласно изложенному, порядок малости для параметра τ может быть равным лишь порядку малости величины h^n для n = 1 и n = 2. Конкретизация процесса случайного блуждания возможна для двух случаев соотношения между параметрами процесса блуждания h и τ, а именно

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{h^2}{\tau}=\text{const} \text{ и } \lim_{\tau\to 0}\frac{h}{\tau}=\text{const}. \quad (17)$$

Эти два случая, дающие различные дифференциальные уравнения для процесса случайного блуждания, рассматриваются ниже.

Математическая модель случайного блуждания в пространстве координат для движения с локальной сменой направления

Первоначально рассмотрим процесс случайного блуждания для первого из соотношений в (17), а именно – для соотношения

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{h^2}{\tau}=\text{const}, \quad (18)$$

принятие которого оставляет в правой части уравнения (16) только два первых слагаемых (остальные обнуляются), что позволяет записать вместо (16) следующее уравнение с конечным числом слагаемых в правой и левой частях:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=-\frac{h}{\tau}\cdot\frac{\partial\rho(\alpha-\beta)}{\partial x}+\frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2\rho(\alpha+\beta)}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Уравнение (19) не может быть использовано еще для непосредственного решения, поскольку оно содержит неопределенные переходные вероятности α и β, которые могут быть любыми функциями координаты (но не времени – ведь процесс блуждания принят марковским). Поэтому для придания уравнению (19) вида, который бы позволял его решение, следует установить характер функционального изменения суммы

$\alpha+\beta$ и разности $\alpha-\beta$, входящих в правую часть уравнения (19).

Учтем, что для модельного тела может быть принято условие его безостановочного блуждания. То есть примем условие, что модельное тело может только совершать прыжки (либо вправо, либо влево) без остановки его в некоторой точке на оси блуждания в следующий после попадания в эту точку момент времени. В этом случае имеет место следующее равенство:

$$(\alpha+\beta)=1 . \qquad (20)$$

Учет (20) позволяет записать вместо уравнения (19) уравнение

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=-\frac{h}{\tau}\cdot\frac{\partial\rho(\alpha-\beta)}{\partial x}+\frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} . \qquad (21)$$

Что же касается разности $\alpha-\beta$, то при определении этой разности следует учитывать конкретные особенности движения «тела-представителя».

Математическая модель случайного блуждания в пространстве координат для однонаправленного движения

Рассмотрим теперь случай движения модельного тела в процессе случайного блуждания, соответствующий второму соотношению в (17). А именно, рассмотрим случай, соответствующий условию

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{h}{\tau}=\text{const} . \qquad (22)$$

Принятие этого условия позволяет записать вместо исходного уравнения (16) следующее уравнение:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=-\frac{h}{\tau}\cdot\frac{\partial\rho(\alpha-\beta)}{\partial x} . \qquad (23)$$

Ведь принятие условия (22) означает, что второе слагаемое $\frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2\rho(\alpha+\beta)}{\partial x^2}$ в правой части уравнения (16) имеет первый порядок малости, совпадающий с порядком малости параметра случайного блуждания τ (все последующие слагаемые имеют еще больший порядок малости). Переходные вероятности α и β и плотность вероятности $\rho(x,t)$ являются конечными величинами, как конечной величиной является и отношение h/τ, а, следовательно, это слагаемое имеет порядок малости, равный порядку малости параметра случайного блуждания h, равного, в свою очередь, согласно (22), порядку малости параметра случайного блуждания τ.

Последнее при предельном переходе и позволяет записать вместо (16) уравнение (23), представляющее собой, наряду с уравнением (21), модель случайного блуждания в пространстве координат.

Общее дифференциальное уравнение процесса случайного одномерного блуждания в пространстве скоростей

Изменение скорости в некотором случайном процессе формально, как и изменение пространственной координаты, может быть описано на основе применения теории вероятностных процессов. При этом скорость или ее составляющие может рассматриваться как случайная величина, представляющая собой некоторую координату (координаты) пространства скоростей. Формально это означает возможность замены линейной координаты x в уравнениях, описывающих вероятностное изменение этой координаты, на скорость как координату пространства скоростей. Однако особенности скорости как физической величины приводят к определенным трудностям при такой формальной замене. Поэтому ниже приводится вывод общего дифференциального уравнения процесса случайного одномерного (относительно некоторой скорости V) блуждания в пространстве скоростей.

С этой целью введем в рассмотрение $P(V,t)$ – вероятность того, что в момент времени t скорость тела будет равна V. Кроме того, введем такие переходные вероятности:

αV – вероятность того, что тело, имеющее скорость V, изменит ее в сторону увеличения на ΔV;

βV – вероятность того, что тело, имеющее скорость V, изменит ее в сторону уменьшения на ΔV.

Тогда для вероятности $P(V,t+\Delta t)$ – то есть вероятности того, что в момент времени $(t+\Delta t)$ тело будет иметь скорость V, – можно записать следующее уравнение полной вероятности (Чепмена-Колмогорова)

$$P(V,t+\Delta t)=P(V,t)\left[1-\alpha_V-\beta_V\right]+ +P(V-\Delta V,t)\alpha_{V-\Delta V}+P(V+\Delta V,t)\beta_{V-\Delta V} , \qquad (24)$$

в котором:

– первое слагаемое есть вероятность того, что тело, приобретя в момент времени t скорость V, не изменит ее в следующий момент времени $(t+\Delta t)$;

– второе слагаемое есть вероятность того, что тело, приобретя в момент времени t скорость $(V-\Delta V)$, увеличит ее на ΔV в следующий момент времени $(t+\Delta t)$;

– третье слагаемое есть вероятность того, что тело, приобретя в момент времени t скорость $(V+\Delta V)$, уменьшит ее на ΔV в следующий момент времени $(t+\Delta t)$.

Если теперь в (24) заменить функцию вероятности $P(V,t)$ на ее плотность ρ, используя соотношение

$$\rho(V,t)=P(V,t)\cdot\Delta V,$$

то аналогично тому, как это сделано выше при рассмотрении блужданий в пространстве координат, вместо (24) можно записать равенство

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{(\Delta V)^2}{2\Delta t}\cdot\frac{\partial^2\rho\cdot(\alpha_V+\beta_V)}{\partial t^2}+\frac{(\Delta V^4)}{24\Delta t}\cdot\frac{\partial^4\rho\cdot(\alpha_V+\beta_V)}{\partial t^4}+...- -\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot\frac{\partial\rho\cdot(\alpha_V-\beta_V)}{\partial t}+\frac{(\Delta V)^3}{6\Delta t}\cdot\frac{\partial^3\rho\cdot(\alpha_V-\beta_V)}{\partial t^3}+...\right), \tag{25}$$

в котором для простоты записи не указана функциональная зависимость от V для ρ и переходных вероятностей.

Уравнение (25) является самым общим (в рамках принятой модели случайного блуждания) уравнением, описывающим вероятностное блуждание модельного тела в пространстве скоростей. Для его конкретизации учтем, что блуждание в пространстве скоростей моделирует такое реальное движение «тела-представителя», которое происходит с регулярным изменением значения скорости при соответствующем вибрационном воздействии. Это означает, что за время Δt происходит обязательное изменение скорости модельного тела, а, следовательно, имеет место соотношение $(\alpha_V+\beta_V)=1$, учет которого позволяет переписать (25) к виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{(\Delta V)^2}{2\Delta t}\cdot\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{(\Delta V^4)}{24\Delta t}\cdot\frac{\partial^4\rho}{\partial t^4}+...- -\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot\frac{\partial\rho\cdot(\alpha_V-\beta_V)}{\partial t}+\frac{(\Delta V)^3}{6\Delta t}\cdot\frac{\partial^3\rho\cdot(\alpha_V-\beta_V)}{\partial t^3}+...\right), \tag{26}$$

Далее, как и для случая случайного блуждания в пространстве координат, учтем, что соотношение между ΔV и Δt не может быть произвольным, а должно быть таким, чтобы правая часть (26) содержала в предельном случае $\Delta V\to 0$ и $\Delta t\to 0$ конечное число конечных по величине слагаемых. Для этого заметим, что если в (26) какое-то нечетное (n + 1)-ое слагаемое является конечным, то Δt имеет порядок малости $(\Delta V)^n\cdot(\alpha_V-\beta_V)$, и коэффициент $(\Delta V)^n/(n!\cdot\Delta t)$ перед четным соответствующим слагаемым будет иметь бесконечное значение (ведь рассматриваем предельный случай $\Delta V\to 0$ и $\Delta t\to 0$). Чтобы этого не было, уравнение (26) должно содержать в предельном случае первые нечетное и четное слагаемые. Таким образом, учитывая изложенное, вместо (26) можно записать следующее уравнение, являющееся исходным для рассмотрения движений «тела-представителя»

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot\frac{\partial\rho\cdot(\alpha_V-\beta_V)}{\partial t}+\frac{(\Delta V)^2}{2\Delta t}\cdot\frac{\partial^2\rho\cdot(\alpha_V-\beta_V)}{\partial t^2}. \tag{27}$$

Связь параметров случайных модельных блужданий в пространстве координат с параметрами движений «тела-представителя»

Ниже проводится анализ связи моделей случайного блуждания в пространстве координат (блуждание с локальной сменой направления и однонаправленное блуждание) с целью максимального использования при описании реального циркуляционного движения «тела-представителя» полученных соотношений для случайного блуждания модельного тела. Этим моделям соответствуют две системы параметров и два дифференциальных уравнения, которые различаются между собой по виду и решению.

Здесь отметим, что при рассмотрении процесса блуждания модельного тела с локальной сменой направления использовано десять параметров (табл. 1), которые связаны между собой (табл. 2):

– двумя соотношениями для переходных вероятностей;

– обозначением отношения параметров одного порядка малости;

– аналитическими выражениями для среднего перемещения и его среднеквадратичного отклонения;

– равенством между средней скоростью случайного блуждания с локальной сменой направления и циркуляционного движения

Таблица 1

Параметры вероятностных процессов блуждания в пространстве координат

Наименование	Обозначение	
	Блуждание с локальной сменой направления	Однонаправленное блуждание
Переходные вероятности	α_1, β_1	α_1, β_2
Шаг блуждания	$h_{цирк.,\,1}$	$h_{цирк.,}$ 2
Время перехода-скачка	τ_1	τ_2
Параметр для отношения величин одного порядка малости	$D_{x,цирк.}$	μ
Коэффициенты	k	k_0
Вынуждающая сила	f	f
Среднее перемещение и его среднеквадратичное отклонение	$\{x\}_1$, σ_{x1}	$\{x\}_2$, σ_{x2}
Средняя скорость циркуляционного движения	$V_{цирк.}$	$V_{цирк.}$

Таблица 2

Сводка соотношений между параметрами модельных случайных блужданий в пространстве координат

Наименование соотношений	Аналитическая форма записи	
	Блуждание с локальной сменой направления	Однонаправленное блуждание
Соотношения для переходных вероятностей	$\alpha_1+\beta_2=1$, $\alpha_1-\beta_2=k\cdot h_1\cdot f$,	$\beta_2=0$, $\alpha_2=k_0\cdot f$,
Отношение величин одного порядка малости	$D_{x,цирк.}=\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2_{цирк.,1}}{\tau_1}$,	$\mu=\frac{h_{цирк.,2}}{\tau_2}$,
Выражения для среднего перемещения и его среднеквадратичного отклонения	$\{x\}_1=2\cdot k\cdot D_x\cdot f\cdot t$, $\sigma_{x1}=\sqrt{2\cdot D_x\cdot t}$,	$\{x\}_2=k_0\cdot\mu\cdot f\cdot t$, $\sigma_{x1}=\sqrt{2\cdot D_x\cdot t}$,
Равенство средней скорости модельного движения реальной циркуляционной	$2\cdot k\cdot D_x\cdot f=V_{цирк.}$,	$k_0\cdot\mu\cdot f=V_{цирк.}$,

«тела-представителя», принятым для соответствия этому движению движения модельного тела.

Таким образом, для процесса случайного блуждания с локальной сменой направления имеем десять параметров, связанных между собой шестью соотношениями (табл. 2). Аналогично и для процесса однонаправленного блуждания имеем десять параметров, один из которых определен (β_2=0), а остальные связаны между собой пятью соотношениями (табл. 2).

Аналитические выражения для среднего перемещения и его среднеквадратичного отклонения позволяют связать между собой рассматриваемые параметры, если для «тела-представителя» в какой-то определенный момент времени известны или среднее перемещение, или его среднеквадратичное отклонение, принимаемые равными, соответственно, среднему перемещению или его среднеквадратичному отклонению у модельного тела.

Поэтому, не учитывая пока эти аналитические выражения и соответствующие им параметры (среднее перемещение и его среднеквадратичное отклонение), для каждого из рассматриваемых модельных процессов блуждания в пространстве координат можно выделить восемь параметров, полностью определяющих эти процессы:

– параметры α_1, β_1, h_1, τ_1, $D_{x,цирк.}$, k, f, $V_{цирк.}$ для процесса случайного блуждания с локальной сменой направления;

– параметры α_2, β_2, h_2, τ_2, μ, k_0, f, $V_{цирк.}$ для процесса однонаправленного блуждания.

Причем, для каждого из рассматриваемых модельных движений соответствующие параметры связаны следующими соотношениями:

для процесса с локальной сменой направления
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_1 - \beta_1 = k \cdot h_1 \cdot f, \\ D_{x,цирк.} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h_1^2}{\tau_1}, \\ 2 \cdot k \cdot D_{x,цирк.} \cdot f = V_{цирк.}; \end{cases} \quad (28)$$

для процесса однонаправленного блуждания
$$\begin{cases} \beta_2 = 0, \\ \alpha_2 = k_0 \cdot f, \\ \mu = \dfrac{h_2}{\tau_2}, \\ k_0 \cdot \mu \cdot f = V_{цирк.}. \end{cases} \quad (29)$$

То есть для процесса с локальной сменой направления имеем четыре уравнения связи для восьми параметров α_1, β_1, h_1, τ_1, $D_{x,цирк.}$, k, f, $V_{цирк.}$. Для процесса же однонаправленного случайного блуждания имеем три уравнения связи (равенство $\beta_2=0$ является задающим соотношением) для семи параметров α_2, h_2, τ_2, μ, k_0, f, $V_{цирк.}$.

Таким образом, если для процесса с локальной сменой направления задать значения каких-либо четырех параметров, то значения остальных четырех параметров могут быть найдены из систем (28). Аналогично и для процесса однонаправленного блуждания, если задать значения каких-либо четырех (из α_2, h_2, τ_2, μ, k_0, f, $V_{цирк.}$) параметров, то значения остальных трех параметров могут быть найдены из последних трех уравнений в (29).

Задаваемые параметры должны быть независимы, например:

– для процесса с локальной сменой направления нельзя одновременно задавать параметры α_1 и β_1, поскольку, согласно первому уравнению в (28), задание α_1 однозначно определяет значение β_1;

– для процесса однонаправленного блуждания нельзя одновременно задавать параметры α_2, k_0, и f, поскольку, по второму уравнению системы (29), задание двух любых из этих параметров однозначно определяет третий параметр.

В качестве таких независимых задаваемых параметров для обоих из рассматриваемых процессов можно принять время перехода-скачка (τ_1 и τ_2 соответственно) и шаг блуждания (h_1 и h_2 соответственно). Тогда, если задать еще и параметры f и $V_{цирк.}$ процесса циркуляционного движения «тела-представителя», то из системы (28) и системы (29) можно получить соотношения для определения параметров движения тела, приведенные в табл. 3 и 4. Соотношения для определения параметров рассматриваемых процессов при других комбинациях задаваемых параметров также приведены в табл. 3 и 4.

Дальнейшей целью является уменьшение количества произвольно задаваемых параметров. Сами эти процессы должны при этом рассматриваться совместно.

В частности такими дополнительными соотношениями являются соотношения, которые можно получить на основе тождественности среднего перемещения и его среднеквадратичного отклонения для блуждания с локальной сменой направления и однонаправленного блуждания.

Эта тождественность для среднего перемещения следует из последних соотношений систем (28) и (29). Поэтому соответствующее этой тождественности равенство можно не добавлять к соотношениям рассматриваемых систем. Что же касается тождественности среднеквадратичных отклонений σ_{x1} и σ_{x2}, то она дает дополнительно к соотношениям систем (28) и (29) соотношение

$$2 \cdot D_{x,цирк.} = k_0 \cdot \mu \cdot h_2 \cdot f. \quad (30)$$

Таким образом, приведенное описание систем уравнений (28) и (29) дает тринадцать параметров (а именно: α_1, β_1, h_1, τ_1, $D_{x,цирк.}$, k, α_2, h_2, τ_2, μ, k_0, f, $V_{цирк.}$), удовлетворяющих, с учетом (30), восьми соотношениям:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_1 - \beta_1 = k \cdot h_1 \cdot f, \\ D_{x,цирк.} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h_1^2}{\tau_1}, \\ 2 \cdot k \cdot D_{x,цирк.} \cdot f = V_{цирк.} \\ \alpha_2 = k_0 \cdot f, \\ \mu = \dfrac{h_2}{\tau_2}, \\ k_0 \cdot \mu \cdot f = V_{цирк.}, \\ 2 \cdot D_{x,цирк.} = k_0 \cdot \mu \cdot h_2 \cdot f. \end{cases} , \quad (31)$$

Таблица 3

Варианты определения параметров случайного блуждания в пространстве координат с локальной сменой направления по задаваемым параметрам

Задаваемые параметры	Соотношения для определяемых параметров
h_1, τ_1, f, $V_{цирк.}$	$D_{x,цирк.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1}$, $k = \frac{V_{цирк.} \cdot \tau_1}{h_1^2 \cdot f}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{V_{цирк.} \cdot \tau_1}{h_1}\right)$, $\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{V_{цирк.} \cdot \tau_1}{h_1}\right)$.
α_1, h_1, τ_1, f	$\beta_1 = 1 - \alpha_1$, $k = \frac{2 \cdot \alpha_1 - 1}{h_1 \cdot f}$, $D_{x,цирк.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1}$, $V_{цирк.} = (2 \cdot \alpha_1 - 1) \cdot \frac{h_1}{\tau_1}$.
h_1, τ_1, k, f	$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + k \cdot h_1 \cdot f)$, $\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - k \cdot h_1 \cdot f)$, $D_{x,цирк.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1}$, $V_{цирк.} = k \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1} \cdot f$.

Таблица 4

Варианты определения параметров для процесса однонаправленного случайного блуждания по задаваемым параметрам

Задаваемые параметры	Соотношения для определяемых параметров
h_2, τ_2, f, $V_{цирк.}$	$\mu = \frac{h_2}{\tau_2}$, $k_0 = \frac{V_{цирк.} \cdot \tau_2}{f \cdot h_2}$, $\alpha_2 = \frac{V_{цирк.} \cdot \tau_2}{h_2}$.
α_2, h_2, τ_2, f	$k_0 = \frac{\alpha_2}{f}$, $\mu = \frac{h_2}{\tau_2}$, $V_{цирк.} = \alpha_2 \cdot \frac{h_2}{\tau_2}$.
h_2, τ_2, k_0, f	$\alpha_2 = k_0 \cdot f$, $\mu = \frac{h_2}{\tau_2}$, $V_{цирк.} = k_0 \cdot \frac{h_2}{\tau_2} \cdot f$.

Сравнение системы (31) с данными табл. 3 и табл. 4 позволяет заметить, что совместное рассмотрение процесса блуждания с локальной сменой направления и процесса однонаправленного блуждания позволяет уменьшить для каждого из процессов число задаваемых параметров на один.

Далее для этого упростим систему (31), подставив во все соотношения, где присутствуют параметры $D_{x,цирк.}$ и μ, их аналитические выражения

$$D_{x,цирк.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1} \text{ и } \mu = \frac{h_2}{\tau_2},$$

что позволяет записать вместо (31) такую систему из шести соотношений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_1 - \beta_1 = k \cdot h_1 \cdot f, \\ k \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1} \cdot f = V_{цирк.}, \\ \alpha_2 = k_0 \cdot f, \\ k_0 \cdot \frac{h_2}{\tau_2} \cdot f = V_{цирк.}, \\ \frac{h_1^2}{\tau_1} = k_0 \cdot \frac{h_2^2}{\tau_2} \cdot f, \end{cases} \qquad (32)$$

которые связывают между собой одиннадцать параметров: α_1, β_1, h_1, τ_1, k, α_2, h_2, τ_2, k_0, f, $V_{цирк.}$.

Отметим, что использование системы (32) вместо системы (31) выводит параметры $D_{x,цирк.}$ и μ из состава задаваемых. Эти параметры могут быть определены по соотношениям $D_{x,цирк.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1}$ и $\mu = \frac{h_2}{\tau_2}$, после того, как входящие в них параметры будут заданы или определены из системы (32).

Итак, имеем одиннадцать параметров (α_1, β_1, h_1, τ_1, k, α_2, h_2, τ_2, k_0, f, $V_{цирк.}$), связанных между собой шестью соотношениями системы (32). При этом, очевидно, для уменьшения числа задаваемых параметров систему (32) необходимо еще дополнить соотношениями между указанными параметрами.

Для параметров τ_1 и τ_2 можно принять их равенство между собой. В самом деле, эти параметры характеризуют время перехода-скачка в процессе движения модельного тела, соответственно, при блуждании с локальной сменой направления и однонаправленном блуждании. Очевидно, что движение модельного тела должно соответствовать движению «тела-представителя», являющемуся некоторым скачкообразным движением. Причем, время перехода-скачка для каждого из модельных процессов является аналогом времени среднего скачка в движении «тела-представителя», что и предопределяет равенство параметров τ_1 и τ_2 между собой. При этом, если обозначить среднее время скачка «тела-представителя» как τ_0, то, кроме равенства параметров τ_1 и τ_2 между собой, можно дополнительно записать еще их равенство времени τ_0, что, впрочем, добавляет еще один параметр τ_0 к уже имеющимся.

С учетом изложенного, вместо системы (32) можно записать следующую систему из восьми соотношений для двенадцати параметров (α_1, β_1, h_1, τ_1, k, α_2, h_2, τ_2, k_0, f, $V_{цирк.}$ и τ_0), что позволяет уменьшить число задаваемых параметров до четырех.

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1=1, & k\cdot\dfrac{h_1^2}{\tau_1}\cdot f=V_{цирк.}, \\ \alpha_1-\beta_1=k\cdot h_1\cdot f, & k_0\cdot\dfrac{h_2}{\tau_2}\cdot f=V_{цирк.}, \\ \alpha_2=k_0\cdot f, & \dfrac{h_1^2}{\tau_1}=k_0\cdot\dfrac{h_2^2}{\tau_2}\cdot f, \\ \tau_1=\tau_0, & \tau_2=\tau_0, \end{cases} \qquad (33)$$

Дальнейшее уменьшение числа задаваемых параметров введением дополнительных соотношений нельзя осуществлять без того, чтобы эти соотношения не учитывали бы каким-либо образом физические особенности в движении «тела-представителя». Введем как дополнительное соотношение, без привязки к физическим особенностям движения «тела-представителя», равенство переходных вероятностей α_1 и α_2

$$\alpha_1=\alpha_2, \qquad (34)$$

использование которого позволяет записать вместо системы (33) следующую систему из шести соотношений между девятью параметрами (α_1, β_1, h_1, k, h_2, k_0, f, $V_{цирк.}$ и τ_0)

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1=1, & k\cdot\dfrac{h_1^2}{\tau_0}\cdot f=V_{цирк.}, \\ \alpha_1-\beta_1=k\cdot h_1\cdot f, & k_0\cdot\dfrac{h_2}{\tau_0}\cdot f=V_{цирк.}, \\ \alpha_1=k_0\cdot f, & h_1^2=k_0\cdot h_2^2\cdot f. \end{cases} \qquad (35)$$

Последовательно избавляясь в системе (35) от параметров β_1, α_1, k_0, k и h_2, ее можно свести к соотношению

$$2\cdot\left(\frac{V_{цирк.}\cdot\tau_0}{h_1}\right)^2-\frac{V_{цирк.}\cdot\tau_0}{h_1}-1=0\,,$$

решение которого как квадратного уравнения относительно комбинации параметров $\dfrac{V_{цирк.}\cdot\tau_0}{h_1}$ позволяет получить соотношение (принимаем только положительное значение корня указанного квадратного уравнения) $\dfrac{V_{цирк.}\cdot\tau_0}{h_1}=1$, учет которого позволяет записать вместо системы (35) такую ее эквивалентную форму

$$\begin{cases} \alpha_1=\alpha_2=1, & \beta_1=0, \\ h_1=h_2, & h_1=V_{цирк.}\cdot\tau_0, \\ k=\dfrac{1}{f\cdot V_{цирк.}\cdot\tau_0}, & k_0=\dfrac{1}{f}, \end{cases} \qquad (36)$$

два первых равенства в которой означают, что в рассматриваемом случае (α_1=α_2) оба модельных движения (и блуждание с локальной сменой направления, и однонаправленное блуждание) вырождаются в детерминированное движение без случайных скачков-переходов (α_1=α_2=1).

Принятие для модельных движений условия (34), которое не связано с физическими особенностями циркуляционного движения «тела-представителя», не позволяет получить случайности в этих модельных движениях. Это не позволяет описывать ими в данном случае циркуляционное движение «тела-представителя», случайность которого является характерной особенностью этого движения как физического процесса.

Аналогично нельзя вводить в качестве дополнительного соотношения равенство скачков-переходов для рассматриваемых модельных движений (то есть равенство $h_1 = h_2$), так как в этом случае также нельзя учесть случайность как физическую особенность циркуляционного движения «тела-представителя». Это несложно увидеть из системы (36), к которой принятие указанного условия также сводит систему соотношений (33). То есть при $h_1 = h_2$ рассматриваемые модельные движения также вырождаются в детерминистский процесс ($\alpha_1=\alpha_2=1$).

Для уменьшения числа задаваемых параметров необходимо учесть физические особенности циркуляционного движения «тела-представителя», проявляющиеся как особенности его «скачкообразного» движения. Такой учет позволил ввести для рассматриваемых модельных движений (блуждание с локальной сменой направления и однонаправленное блуждание) равенства $\tau_1=\tau_0$ и $\tau_2=\tau_0$, что позволило получить систему соотношений (33).

В развитие такого подхода по учету физических особенностей циркуляционного движения «тела-представителя» примем, что среднеквадратичные отклонения модельных движений не только равны между собой, но и за время $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ равны амплитуде скачкообразного движения «тела-представителя» (обозначим ее A_0). В самом деле, оба модельных движения (и блуждание с локальной сменой направления, и однонаправленное блуждание) представляют собой «скачкообразное» движение модельного тела, которое, чтобы соответствовать скачкообразному движению «тела-представителя», за время скачка-перехода (а оно принято равным $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$) должно по величине скачка быть равным величине скачка «тела-представителя», имеющего амплитуду A_0.

Эта амплитуда должна, очевидно, пониматься как средняя амплитуда случайного по своему характеру скачкообразного движения «тела-представителя». Причем, поскольку скачкообразное движение «тела-представителя» определяется вибрационными колебаниями контейнера ВиО-станка, в первом приближении амплитуда этого скачкообразного движения может быть принята равной амплитуде вибрационных колебаний контейнера ВиО-станка. То есть амплитуда A_0 представляет собой параметр, определяемый вибрацией контейнера ВиО-станка и являющийся при рассмотрении движения «тела-представителя» заданным как характеристика соответствующего ВиО-станка.

Итак, учитывая имеющиеся аналитические выражения для среднеквадратичного отклонения для рассматриваемых модельных процессов движения в пространстве координат (табл. 2) и учитывая принятое условие о равенстве среднеквадратичного отклонения этих модельных движений за время $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ амплитуде A_0, можно записать следующую цепочку равенств

$$A_0 = \sqrt{2 \cdot D_x \cdot \tau_0} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1^2}{\tau_0} \cdot \tau_0} = h_1 ,$$

дающую дополнительное соотношение

$$h_1=A_0,$$

подстановка которого в систему соотношений (33) позволяет получить после несложных преобразований (замена параметров τ_1 и τ_2 на параметр (0 и группировка параметров) систему из шести соотношений между девятью параметрами α_1, β_1, α_2, k, h2, k0, f, $V_{цирк.}$ и τ_0 (амплитуда A_0 не входит в этот список параметров, поскольку она считается известной как задаваемая характеристика ВиО-станка)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1, & \dfrac{\alpha_2}{k_0} = f, \\ \dfrac{\alpha_1 - \beta_1}{k} = A_0 \cdot f, & k_0 \cdot h_2 = \dfrac{V_{цирк.} \cdot \tau_0}{f}, \\ k = V_{цирк.} \cdot \dfrac{\tau_0}{A_0^2 \cdot f}, & k_0 \cdot h_2^2 = \dfrac{A_0^2}{f}. \end{cases} \quad (37)$$

Таким образом, система (37) позволяет по заданным из ряда α_1, β_1, α_2, k, h_2, k_0, f, $V_{цирк.}$, τ_0 трем независимым друг от друга параметрам определить остальные.

Если считать заданными параметры, характеризующие движение «тела-представителя», а именно - параметры f, $V_{цирк.}$ и τ_0, то параметры, характеризующие модельные процессы блуждания (α_1, β_1, α_2, k, h_2, k_0), могут быть легко определены на основе соотношений системы (37). Собственно, исходя из этого, все соотношения системы (37) записаны так, что в левой своей части содержат параметры рассматриваемых модельных движений (левая колонка соотношений содержит параметры блуждания с локальной сменой направления, а правая колонка соотношений содержит параметры однонаправленного блуждания), а в правой своей части содержат параметры, характеризующие движение «тела-представителя».

Разрешая систему (37) относительно параметров α_1, β_1, α_2, k, h_2, k_0 и добавляя к полученному результату принятые выше соотношения для параметров β_2, h_1, τ_1 и τ_2 (а именно: $\beta_2=0$, $h_1=A_0$ и $\tau_1 = \tau_2=\tau_0$), можно записать соотношения, выражающие параметры модельных процессов блуждания через параметры движения «тела-представителя» в вибрирующем контейнере ВиО-станка. А именно:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{V_{\text{цирк.}}\cdot\tau_0}{A_0}\right), & \alpha_2 = \left(\dfrac{V_{\text{цирк.}}\cdot\tau_0}{A_0}\right)^2, \\ \beta_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{V_{\text{цирк.}}\cdot\tau_0}{A_0}\right), & \beta_2 = 0, \\ h_1 = A_0, & h_2 = \dfrac{A_0^2}{V_{\text{цирк.}}\cdot\tau_0}, \\ \tau_1 = \tau_0, & \tau_2 = \tau_0, \\ k = \dfrac{V_{\text{цирк.}}\cdot\tau_0}{f\cdot A_0^2}, & k_0 = \dfrac{\left(V_{\text{цирк.}}\cdot\tau_0\right)^2}{f\cdot A_0^2}. \end{cases} \tag{38}$$

Заметим, что из соотношений для α_1 и α_2 в (38) несложно вывести следующую их связь между собой (при $\tau_1 = \tau_2$)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\alpha_2}\right),$$

которая показывает, что параметры α_1 и α_2 не могут приниматься равными друг другу (при $\tau_1 = \tau_2$), кроме случая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, как это и получено выше.

Рассматриваемые модельные движения случайных блужданий в пространстве координат интересуют не сами по себе, а постольку, поскольку они помогают в описании движения «тела-представителя». Задача описания соответствующих модельных движений по параметрам циркуляционного движения «тела-представителя» в контейнере, которую позволяет решить система (38), является обратной задаче, решаемой в данной работе, – описание циркуляционного движения «тела-представителя» на основе модели случайных блужданий в пространстве координат: блуждания с локальной сменой направления и случайного однонаправленного блуждания. Именно эту последнюю задачу система (38) не позволяет решить непосредственно.

Система (38) содержит одиннадцать неопределенных параметров (α_1, β_1, α_2, h_2, τ_1, τ_2, k, k_0, f, $V_{\text{цирк.}}$, τ_0), связанных между собой соответствующими восемью соотношениями (остаются после исключения из десяти соотношений, имеющихся в указанной системе, двух: $\beta_2=0$, $h_1=A_0$). Поэтому для превращения системы (38) в систему разрешимых уравнений необходимо задать три независимых параметра. В этом случае хотя бы один из задаваемых параметров должен относиться к рассматриваемым модельным движениям, чтобы, задав дополнительно к нему еще любые два параметра циркуляционного движения «тела-представителя» из трех параметров f, $V_{\text{цирк.}}$, τ_0, определить один из них, оставшийся не заданным. Но как раз параметры модельных движений нам и неизвестны, и, следовательно, система (38) не позволяет решать задачу определения параметров циркуляционного движения «тела-представителя» по параметрам рассматриваемых модельных вероятностных блужданий.

Чтобы систему (38) можно было использовать для определения параметров циркуляционного движения «тела-представителя» в вибрирующем контейнере ВиО-станка, не задавая при этом непосредственно параметров модельных движений, эту систему надо дополнить соответствующими соотношениями. При этом для определения по известным двум хотя бы одного из введенных в рассмотрение параметров циркуляционного движения «тела-представителя» (f, $V_{\text{цирк.}}$ или τ_0) достаточно соотношения системы (38) дополнить одним соотношением. Это дополнительное соотношение может быть лишь соотношением между параметрами модельных движений и параметрами соответствующего циркуляционного движения «тела-представителя».

Это соотношение не может быть соотношением только между параметрами рассматриваемых модельных движений, так как все возможные такие соотношения уже использованы. Оно не может быть также соотношением только между параметрами собственно циркуляционного движения «тела-представителя» в вибрирующем контейнере ВиО-станка. Ведь задание одного такого соотношения позволяет только выразить в правой части соотношений системы (38) один из параметров f, $V_{цирк.}$ или τ_0 через два других. Это, конечно, упрощает определение параметров соответствующих модельных движений по параметрам циркуляционного движения «тела-представителя», но не дает возможности определять параметры циркуляционного движения «тела-представителя» без непосредственного задания параметров модельных движений.

Аналогично для определения двух любых параметров f, $V_{цирк.}$ или τ_0 по одному известному, или определения всех трех этих параметров необходимо дополнительно задать, соответственно, два и три соотношения между параметрами модельных движений и параметрами циркуляционного движения «тела-представителя» в вибрирующем контейнере ВиО-станка. Причем эти соотношения не могут быть соотношениями лишь между параметрами соответствующего циркуляционного движения. Так, в случае наличия двух таких соотношений, правая часть системы (38) сводится к виду, содержащему лишь один из параметров циркуляционного движения «тела-представителя» (f, $V_{цирк.}$ или τ_0). Это, однако, не дает возможности определять этот параметр без непосредственного задания параметров модельных движений - такая возможность реализуется при этом, если задано соотношение между параметрами модельных движений и параметрами циркуляционного движения «тела-представителя». В случае же наличия трех таких соотношений три параметра f, $V_{цирк.}$ и τ_0 могут быть определены непосредственно на основе этих соотношений без использования системы (38), которая в этом случае служит лишь для определения параметров модельных движений по параметрам циркуляционного движения «тела-представителя» в вибрирующем контейнере ВиО-станка. Но в этом случае исследованию необходимо подвергнуть уже не предлагаемое вероятностное моделирование циркуляционного движения «тела-представителя» в вибрирующем контейнере ВиО-станка, а тот способ, с помощью которого были получены дополнительные три соотношения связи между параметрами описываемого циркуляционного движения.

Впрочем, как показано в обзорной части данной работы, такой способ, который позволял бы описывать адекватно реальности циркуляционное движение «тела-представителя» с получением соотношений, связывающих соответствующую циркуляционную скорость $V_{цирк.}$ с другими параметрами этого движения, в настоящее время не разработан. Поэтому предлагаемое вероятностное описание циркуляционного движения «тела-представителя» в вибрирующем контейнере ВиО-станка, сведенное в систему соотношений (38), представляется достаточно приемлемой альтернативой существующим способам описания циркуляционного движения, поскольку оно позволяет определить, как показывается ниже, циркуляционную скорость $V_{цирк.}$ и ее зависимость от параметров соответствующего вибрационного процесса.

Итак, согласно изложенному выше, систему соотношений (38) надо дополнить соотношением, связывающим между собой параметры рассматриваемых вероятностных модельных движений и параметры циркуляционного движения «тела-представителя». В качестве такого дополнительного соотношения может быть принято соотношение, которое можно получить из аналитических выражений для среднего перемещения и его среднеквадратичного отклонения в любом из модельных движений, если известно время, за которое среднеквадратичное отклонение от среднего перемещения в вероятностном модельном движении равно самому этому среднему перемещению.

Обозначим указанное время через t_0. Тогда, приняв за основу процесс блуждания с локальной сменой направления, для среднего перемещения за время t_0 и среднеквадратичного отклонения от этого среднего перемещения за это же время можно записать, соответственно, следующие выражения (см. сводку аналитических соотношений в табл. 2)

$$\{x\}_1 = k \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1} \cdot f \cdot t_0, \quad \sigma_{x1} = \sqrt{\frac{h_1^2}{\tau_1} \cdot t_0},$$

приравнивание которых (с заменой h_1=A_0 и τ_1=τ_0), после несложных преобразований, дает дополнительное соотношение

$$k = \frac{1}{A_0 \cdot f} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{t_0}}, \qquad (39)$$

записанное в форме соотношений из систем (37) и (38) так, чтобы параметр модельного движения k был выражен через параметры движения «тела-представителя».

Включение (39) в состав соотношений системы (38) позволяет уменьшить число произвольно задаваемых параметров с трех до двух. Это дает возможность, считая любые два параметра циркуляционного движения «тела-представителя» из ряда параметров f, $V_{цирк.}$ и τ_0 известными, найти аналитическое выражение через них третьего параметра и параметров вероятностных модельных движений.

В частности, считая известными параметры f и τ_0, можно выразить через них скорость $V_{цирк.}$.Для этого достаточно подставить вместо параметра k в (39) соответствующее соотношение для этого параметра из системы (38), что позволяет записать следующее соотношение

$$V_{цирк.} = \frac{A_0}{\tau_0} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{t_0}}\,. \qquad (40)$$

которое хотя и связывает между собой только параметры циркуляционного движения «тела-представителя», но получено на основе использования рассматриваемых вероятностных модельных движений.

При этом учет (40) позволяет переписать систему (38) к следующему виду, позволяющему определять параметры соответствующих модельных движений по известным параметрам циркуляционного движения «тела-представителя» (A_0, f, τ_0, t_0): а) для процесса случайного блуждания с локальной сменой направления;

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{\tau_0}{t_0}}\right), \\ h_1 = A_0, \\ k = \dfrac{1}{A_0 \cdot f}\sqrt{\dfrac{\tau_0}{t_0}}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\beta_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\tau_0}{t_0}}\right), \\ &\tau_1 = \tau_0, \end{aligned} \qquad (41)$$

б) для процесса случайного однонаправленного блуждания

$$\begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{\tau_0}{t_0}, \\ h_2 = A_0 \cdot \sqrt{\dfrac{t_0}{\tau_0}}, \\ k_0 = \dfrac{\tau_0}{f \cdot t_0}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\beta_2 = 0, \\ &\tau_2 = \tau_0, \end{aligned} \qquad (42)$$

Очевидно, что для того, чтобы полученные аналитические выражения (40)-(42) можно было использовать для практических расчетов, надо уточнить физический смысл параметров, которые входят в правые части этих выражений. А именно: надо уточнить физический смысл параметров A_0, f, τ_0, t_0, чтобы иметь возможность задавать в практике исследований и инженерной практике их численные значения в каждом конкретном случае, когда надо исследовать или определить режимы обработки на основе разработанного вероятностного моделирования движения в вибрирующем контейнере ВиО-станка элементов его загрузки.

В связи с этим отметим:

- процесс объемной виброабразивной обработки в вибрирующем контейнере ВиО-станка определяется, прежде всего, скоростью относительного перемещения рабочей гранулы и обрабатываемой детали;

- эта относительная скорость принята равной флуктуации циркуляционной скорости, оцениваемой по среднеквадратичному отклонению скорости “тела-представителя” в его вероятностном модельном движении – случайном блуждании в пространстве скоростей.

Поэтому для полного описания процесса движения «тела-представителя» как элемента загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка, соотношение (40) для циркуляционной скорости необходимо дополнить соотношением, позволяющим определять соответствующую относительную скорость. Это можно сделать, рассмотрев связь параметров модельного блуждания в пространстве скоростей с параметрами движения «тела-представителя» аналогично тому, как это было сделано выше для модельных движений в пространстве координат.

Связь параметров случайных модельных блужданий в пространстве координат и скоростей с кинематическими параметрами движения «тела-представителя»

При рассмотрении случайного движения элементов загрузки в вибрирующем контейнере ВиО-станка как движения некоторого «тела-представителя» было использовано моделирование этого движения вероятностным блужданием:

– в пространстве координат (пространственное положение «тела-представителя» рассматривается как случайная величина);

– в пространстве скоростей (скорость «тела-представителя» рассматривается как случайная величина).

Это разделение позволяет более просто произвести соответствующее моделирование и получить решения для среднего перемещения и средней скорости с соответствующими среднеквадратичными отклонениями, но оно требует согласования этих решений с учетом того, что они относятся к одному вероятностному движению-блужданию в пространстве «координаты-скорость». Такое согласование должно учитывать также, что вероятностное движение-блуждание должно соответствовать некоторым физическим условиям движения «тела-представителя», являющимся отражением реальных условий, имеющих место при движении элементов загрузки в вибрирующем контейнере ВиО-станка. При этом под согласованием понимается установление таких соотношений, которые связывают между собой параметры вероятностных модельных движений-блужданий с параметрами, характеризующими реальное случайное движение элементов загрузки в вибрирующем контейнере ВиО-станка. Причем эти соотношения должны служить для определения одних параметров реального движения по известным другим параметрам, позволяя определять влияние этих параметров на процесс виброабразивной обработки.

Выше на основе соответствующего согласования параметров модельных блужданий в пространстве координат с параметрами «скачкообразного» движения «тела-представителя» установлено соотношение (40) для циркуляционной скорости элементов загрузки в вибрирующем контейнере. Теперь на основе согласования параметров модельных блужданий в пространстве скоростей с параметрами «скачкообразного» движения «тела-представителя» найдем соответствующую этой циркуляционной скорости относительную скорость, определяющую процесс виброабразивной обработки.

С этой целью учтем, что относительная скорость может рассматриваться как флуктуация циркуляционной скорости. Эта флуктуация, являясь результатом случайности в движении «тела-представителя», моделируется в соответствующем модельном процессе случайного блуждания в пространстве скоростей отклонением скорости этого модельного движения от ее среднего значения.

Аналитически указанное отклонение описывается его среднеквадратичным значением - среднеквадратичное отклонение, для которого при соответствующем рассмотрении блуждания в пространстве скоростей получена зависимость, включающая в себя параметры модельного процесса блуждания в пространстве скоростей (табл. 5) и время t – переменный параметр, а именно – зависимость

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{k_2} \cdot \left(1 - e^{-4 \cdot k_2 \cdot D_V \cdot t}\right)},$$

Таблица 5

Параметры вероятностного модельного блуждания в пространстве скоростей

Наименование	Обозначение
Переходные вероятности	α_V, β_V
Шаг блуждания	ΔV
Время перехода-скачка	τ_V
Параметр для отношения величин одного порядка малости	D_V
Коэффициенты	k_1, k_2
Вынуждающая сила	F
Средняя скорость блуждания в пространстве скоростей	V(t)
Среднеквадратичное отклонение от средней скорости блуждания в пространстве скоростей	σ_V

из которой следует, что среднеквадратичное отклонение с течением времени (t>>0) принимает постоянное значение $(\sigma_V)_{уст} = \sqrt{1/k_2}$, которое и может быть принято в качестве средней относительной скорости абразивной гранулы и обрабатываемой детали (обозначим ее $V_{отн.}$). А именно:

$$V_{отн.} = \sqrt{\frac{1}{k_2}}. \tag{43}$$

Для того, чтобы определить среднюю скорость относительного движения рабочей гранулы и обрабатываемой детали, необходимо определить параметр модельного вероятностного блуждания в пространстве скоростей k_2, представляющий собой один из параметров указанного модельного движения (их список приведен в табл. 5). Очевидно, что определить этот параметр (то есть параметр k_2) можно лишь в совокупности с определением и других параметров соответствующего модельного движения, число которых равно десяти (табл. 5): α_V, β_V, ΔV, τ_V, D_V, k_1, k_2, F, V(t), σ_V.

Аналогично рассмотренным выше модельным движениям в пространстве координат под определением соответствующих параметров понимается нахождение их связи с параметрами, характеризующими реальное движение элементов загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка, имеющей определенную частоту и амплитуду вибрационных колебаний.

При рассмотрении модельного вероятностного блуждания в пространстве скоростей принято и получено в результате решения соответствующего уравнения пять соотношений (табл. 6).

Таблица 6

Сводка соотношений между параметрами модельного вероятностного блуждания в пространстве скоростей

Наименование соотношений	Аналитическая форма записи
Соотношения для переходных вероятностей	$\alpha_V + \beta_V = 1,$ $\alpha_V - \beta_V = [k_1 \cdot F - k_2 \cdot V(t)] \cdot \Delta V,$
Отношение величин одного порядка малости	$D_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V},$
Зависимость для средней скорости модельного блуждания в пространстве скоростей	$V(t) = \frac{k_1}{k_2} \cdot F \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot k_2 \cdot D_V \cdot t}\right)$
Зависимость для среднеквадратичного отклонения скорости модельного блуждания в пространстве скоростей	$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{k_2} \cdot \left(1 - e^{-4 \cdot k_2 \cdot D_V \cdot t}\right)}$

Если при этом считать, что параметр F, как определяющий движение «тела-представителя», должен быть задан (то есть этот параметр должен входить в итоговые соотношения, определяющие другие параметры), то указанные пять соотношений связывают между собой девять параметров из ряда: α_V, β_V, ΔV, τ_V, D_V, k_1, k_2, V(t), σ_V. То есть, задав значения любых четырех параметров из этого ряда, значения остальных пяти параметров можно найти, решив указанные пять соотношений как уравнения относительно не заданных параметров.

Дальнейшей целью является уменьшение числа задаваемых параметров. Для этого следует ввести в рассмотрение дополнительные соотношения, соответствующие условию адекватности описания модельным блужданием в пространстве скоростей реального изменения скорости при движении элементов загрузки в вибрирующем контейнере ВиО-станка.

Заметим, если два соотношения для переходных вероятностей α_V и β_V разрешить относительно этих вероятностей, а именно – если решить относительно α_V и β_V систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_V + \beta_V = 1, \\ \alpha_V - \beta_V = [k_1 \cdot F - k_2 \cdot V(t)] \cdot \Delta V, \end{cases}$$

получив в качестве решения соотношения

$$\alpha_V = \frac{1}{2} \cdot [k_1 \cdot F - k_2 \cdot V(t)] \cdot \Delta V, \quad (44)$$

$$\beta_V = \frac{1}{2} \cdot [1 - k_1 \cdot F + k_2 \cdot V(t)] \cdot \Delta V, \quad (45)$$

то можно увидеть, что определение параметров ряда ΔV, k_1, k_2, V(t) позволяет автоматически определить и параметры α_V, β_V.

Поэтому далее переходные вероятности не рассматриваем. Не рассматриваем также далее и параметр D_V, задаваемый соотношением (табл. 6)

$$D_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V},$$

которое полностью определяет этот параметр, если заданы параметры ΔV и τ_V.

Будем рассматривать только следующие параметры модельного блуждания в пространстве скоростей: ΔV, τ_V, k_1, k_2, V(t), σ_V. Причем из всех соотношений, приведенных в табл. 6, в нашем распоряжении остаются лишь зависимости для V(t) и σ_V (ведь соотношения для переходных вероятностей и отношение величин одного порядка малости использованы для определения параметров α_V, β_V и D_V). Эти зависимости с учетом соответствующего соотношения для параметра D_V могут быть записаны в виде следующих аналитических выражений:

$$V(t) = \frac{k_1}{k_2} \cdot F \cdot \left(1 - e^{-k_2 \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} \cdot t} \right), \quad (46)$$

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{k_2} \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot k_2 \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} \cdot t} \right)}, \quad (47)$$

Итак, далее рассматриваем шесть параметров ΔV, τ_V, k_1, k_2, $V(t)$ и σ_V, которые связаны между собой двумя соотношениями (46) и (47). Эти соотношения, в силу наличия в их правой части времени t, позволяют получить любое число дополнительных соотношений для связи параметров модельного вероятностного блуждания между собой, если для какого-то момента времени известны значения $V(t)$ и σ_V (число соотношений при этом равно числу таких моментов времени).

Однако известны значения параметров $V(t)$ и σ_V лишь для двух моментов времени, а именно:

- для $t = 0$ (когда движение еще не началось) $V(t = 0) = \sigma_V = 0$;

- для $t=\infty$ (когда движение в среднем установилось) $V(t=\infty) = V_{цирк.}$ и $(\sigma_V)_{уст.}=V_{отн.}$.

В самом деле, во-первых, в момент времени $t = 0$, в самом начале движения (то есть в самом начале вибрационного процесса), все элементы загрузки находятся в неподвижном положении, когда их скорость и ее флуктуация равны нулю. Во-вторых, с течением времени происходит установление «регулярности» в случайном движении элементов загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка, проявляющееся в принятии циркуляционной скоростью и ее флуктуацией некоторых средних значений. Причем, поскольку реальный элемент загрузки («тело-представитель») совершает движение и в пространстве координат, и в пространстве скоростей одновременно, то:

- установившаяся циркуляционная скорость для любого элемента загрузки ВиО-станка («тело-представитель») может быть интерпретирована как циркуляционная скорость $V_{цирк.}$ процесса блуждания в пространстве координат и как предельное значение средней скорости модельного блуждания в пространстве скоростей;

- установившаяся флуктуация скорости для любого элемента загрузки ВиО-станка («тело-представитель») может быть интерпретирована как предельное значение среднеквадратичного отклонения от среднего значения скорости для модельного блуждания в пространстве скоростей.

Что касается момента времени t=0, то и (46), и (47) дают при подстановке t=0 тождественный ноль, что соответствует отмеченной неподвижности элементов загрузки в самом начале вибрационного процесса. Эта тождественность не позволяет использовать значение времени t=0 для получения дополнительного соотношения.

Что же касается момента времени $t=\infty$, то, согласно изложенному, выражение (46) должно давать значение циркуляционной скорости $V_{цирк.}$ при подстановке в его правую часть $t=\infty$. Это позволяет записать в итоге соотношение

$$V_{цирк.} = \frac{k_1}{k_2} \cdot F, \quad (48)$$

которое с учетом полученного выше выражения (40) позволяет записать искомое дополнительное соотношение между параметрами k_1 и k_2 модельного вероятностного блуждания в пространстве скоростей в виде следующего равенства

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{A_0}{F \cdot \tau_0} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{t_0}}, \quad (49)$$

правая часть которого представляет комбинацию задаваемых параметров.

Подстановка же значения времени $t=\infty$ в правую часть выражения (47) аналогична тому, что было сделано выше при получении равенства (43). Причем поскольку при этом вводится дополнительный параметр $V_{отн.}$, то соответствующее указанной подстановке соотношение $V_{отн.} = \sqrt{1/k_2}$ не может рассматриваться как дополнительное. Его следует рассматривать, как это и сделано выше при получении (43), в качестве определения относительной скорости через параметры модельного вероятностного блуждания в пространстве скоростей.

Таким образом, использование соотношения (46) при подстановке в него значения времени $t=\infty$ позволяет получить одно дополнительное соотношение (49) между параметрами модельного вероятностного блуждания в пространстве скоростей. При этом, если из списка в шесть параметров ΔV, τ_V, k_l k_2, $V(t)$ и σ_V исключить два последних $V(t)$ и σ_V, учтя, что выражения (46) и (47) определяют их через остальные параметры ΔV, τ_V, k_l и k_2, то указанное дополнительное соотношение является пока единственным соотношением, связывающим между собой параметры из ряда: ΔV, τ_V, k_l, k_2.

Прежде чем устанавливать еще дополнительные соотношения, заметим, что параметр τ_V, определяющий время, после которого происходит изменение значения скорости в модельном вероятностном блуждании в пространстве скоростей, может быть принят равным времени «скачка» τ_0, принятым выше равным времени перехода-скачка в модельном вероятностном блуждании в пространстве координат. Это представляется вполне допустимым, поскольку:

– время τ_0 определяет время колебания-скачка в вибрационном движении реального элемента загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка;

– но именно за это время колебания-скачка происходит изменение скорости у соответствующего элемента загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка, движение которого моделируется рассматриваемым вероятностным блужданием в пространстве скоростей.

То есть из указанных четырех параметров ΔV, τ_V, k_l и k_2 один параметр (а именно - параметр τ_V) может считаться заданным и равным характеристике моделируемого вибрационного движения элемента загрузки (а именно: $\tau_V = \tau_0$). Тогда для определения остальных трех параметров (ΔV, k_l и k_2) необходимо получить еще два соотношения, дополнительно к соотношению (49).

С этой целью учтем, что функция времени, задаваемая правой частью выражения (46), может рассматриваться как решение следующего дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dV(t)}{dt} = k_1 \cdot F \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} - k_2 \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} \cdot V(t), \quad (50)$$

что легко установить, подставляя V(t) в форме правой части (46) в (50).

При этом, поскольку V(t) представляет собой среднюю скорость движения «тела-представителя», то производная dV(t)/dt - это среднее ускорение, определяемое удельной (на единицу массы тела) суммарной силой, действующей на «тело-представитель». При этом, согласно виду правой части (50), эта суммарная сила может быть интерпретирована как разность удельных сил:

ускоряющей
$$F \cdot k_1 \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} \quad (51)$$

и

тормозящей
$$k_2 \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} \cdot V(t). \quad (52)$$

Но, согласно принятой физической картине процесса движения «тела-представителя» как элемента загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка, на «тело-представитель» действуют две силы:

– сила F, вызывающая движение, направленная по скорости;

– сила противодействия движению (сила сопротивления), направленная против скорости и пропорциональная ей.

То есть удельная (на единицу массы «тела-представителя») сила на «тело-представитель» может быть записана согласно принятой физической картине процесса движения этого тела в виде разности

$$\frac{F}{m_э} - \gamma_m \cdot V(t), \quad (53)$$

где $m_э$ – масса «тела-представителя»; γ_m – удельный (на единицу массы) коэффициент, определяющий среднюю удельную силу противодействия движению «тела-представителя».

При этом сравнение составляющих разности (53) с (51) и (52) позволяет записать следующие два соотношения:

$$k_1 \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} \cdot m_э = 1, \quad (54)$$

$$k_2 \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} = \gamma_m, \quad (55)$$

В совокупности соотношения (54) и (55) являются тождественными соотношению (48). В этом легко убедиться, если учесть, что из (53) для $t = \infty$ следует равенство

$$V_{цирк.} = \frac{F}{m_э \cdot \gamma_m}, \quad (56)$$

подстановка в которое значения произведения $m_э \cdot \gamma_m$, полученного после соответствующего преобразования результата деления (54) на (55), и дает (48). Поэтому из полученных соотношений (54) и (55) дополнительно к (49) введем в рассмотрение лишь одно из них, а именно – соотношение (54). Это позволяет, обозначив отношение $F/m_э$ через f, для рассматриваемых трех параметров ΔV, k_1 и k_2 записать следующую систему из двух соотношений (учитывая, что ранее принято $\tau_V = \tau_0$)

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{A_0}{\tau_0 \cdot f} \cdot \sqrt{\dfrac{\tau_0}{t_0}}, \\ k_1 \cdot (\Delta V)^2 = \tau_0, \end{cases} \quad (57)$$

форма записи равенств в которой осуществлена так, чтобы слева в этих равенствах содержались указанные параметры, требующие определения, а справа – параметры, считающиеся известными.

Чтобы найти еще одно дополнительное соотношение, позволяющее однозначно разрешить систему (57) относительно трех параметров в ее правой части, учтем, что вероятностное блуждание в пространстве координат и вероятностное блуждание в пространстве скоростей, как моделирующие движение «тела-представителя» в едином пространстве «координат-скоростей», связаны между собой определенным образом. Причем, эта связь выражается соотношением между соответствующими коэффициентами диффузии [1].

Чтобы найти еще дополнительное соотношение, воспользуемся равенством, полученным автором в диссертационной работе, подстановка в которое аналитических выражений для D_x и D_V (табл. 2 и 6), которым, согласно изложенному, можно придать вид

$$D_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1^2}{\tau_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_0^2}{\tau_0}$$

и

$$D_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\tau_0},$$

позволяет получить следующее соотношение

$$\Delta V = V_{\text{цирк.}}^2 \cdot \frac{\tau_0}{A_0},$$

которому, с учетом соотношения (13) для $V_{\text{цирк.}}$, можно придать вид

$$\Delta V = \frac{A_0}{\tau_0}. \quad (58)$$

Соотношение (58) и есть искомое дополнительное соотношение, подстановка которого в систему (57) позволяет получить после несложных преобразований аналитическое выражение параметров k_1 и k_2 через параметры, характеризующие реальное движение элемента загрузки вибрирующего контейнера ВиО-станка и считающиеся известными (параметры f, A_0, τ_0 и t_0):

$$k_1 = \tau_0 \cdot \left(\frac{t_0}{A_0}\right)^2, \quad (59)$$

$$k_2 = f \cdot \frac{\tau_0^{1.5} \cdot t_0^{2.5}}{A_0^3} \quad (60)$$

Соотношение (60) позволяет при подстановке его в (43) получить для относительной скорости следующее соотношение

$$V_{\text{отн.}} = \frac{A_0^{1.5}}{f^{0.5} \cdot \tau_0^{0.75} \cdot t_0^{1.25}}, \quad (61)$$

которое с учетом соотношения (40) для $V_{\text{цирк.}}$ можно записать также в виде

$$V_{\text{отн.}} = V_{\text{цирк.}}^{1.5} \cdot \sqrt{\frac{1}{f \cdot t_0}}. \quad (62)$$

Литература

1. Бранспиз Е. В. Повышение эффективности виброабразивной обработки путем рационального выбора ее основных параметров: дис. ... канд. техн. наук: 05.03.01 / Бранспиз Елена Владимировна. – Луганск, 2002. – 268с.