

Зав'ялов В. Л.

Бодров В. С.

Мисюра Т. Г.

Попова Н. В.

Запорожець Ю. В.

**Національний  
університет  
харчових  
технологій**

УДК 621.1.013

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗОВНІШНЬОГО МАСООБМІНУ ПРИ ВІБРОЕКСТРАГУВАННІ

*Предложенная математическая модель оценивания массоотдачи для экстракционных процессов. Приведены результаты исследований влияния низкочастотных механических колебаний на внешний массообмен в условиях периодического и непрерывного виброэкстрагирования с использованием модельного сырья с диффузионным типом растворения.*

*Ключевые слова: виброэкстрагирование; математическая модель; массообмен; виброэкстрактор.*

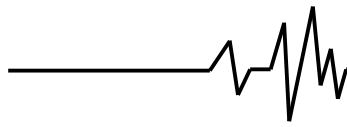
*The offered mathematical model of evaluation of mass-transfer is for extraction processes. The results of researches of influence of lowfrequency mechanical vibrations are brought around to external mass-transfer in the conditions of the periodic and continuous vibroextracting with the use of model raw material with the diffusive type of dissolution.*

*Keywords: vibroextracting; mathematical model; hydrodynamics; mass-transfer; vibroextractor.*

Вивчення закономірностей зовнішнього перенесення маси в системі тверде тіло-рідина за допомогою коефіцієнта масовіддачі на сьогодні є поки що єдиним способом [1], але розвиток інтенсивних екстракційних технологій, зокрема із застосуванням низькочастотних механічних коливань, потребує удосконалення відповідних теоретичних основ з метою розрахунку і оптимізації роботи віброекстракторів [2]. Відомі аналітичні методи визначення величини коефіцієнта масовіддачі від поверхні твердого тіла до екстрагенту є громіздкими, а точність розрахунків залежить від якості визначення розмірів частинок, коефіцієнта дифузії тощо. Отже, існує необхідність створення більш простих, у порівнянні з класичними, і, одночасно, більш точних методів оцінювання зовнішнього масообміну, що ґрунтуються на методах математичного моделювання.

У зв'язку з цим виникає актуальна задача по розробленню нових експериментальних експрес-методів визначення масообмінних характеристик екстракційної апаратури. При

цьому, на увагу заслуговує метод, за яким використовується взаємодія системи суцільних твердих тіл з рідиною; наприклад, розчинення по дифузійному типу солей у рідкому середовищі. Результати застосування цього метода враховуватимуть лише зовнішній масообмін, ефективність якого забезпечує досконалість конструкції екстрактора та його окремих елементів. Так, нами раніше [2] були використані загальні підходи проф. Лободи П.П. [3] по вивченню впливу низькочастотних механічних коливань віброперемішувального пристрою на швидкість розчинення у воді модельних зразків речовини із дифузійним типом розчинення – кристалогідрату сірчанокислого алюмінію  $Al_2(SO_4)_3 \cdot 18H_2O$ , але тепер, – для умов періодичного та неперервного віброекстрагування цільових компонентів із рослинної сировини, – з метою розроблення математичних моделей для інших варіантів насичення робочого середовища екстрактора розчинюваною дослідною речовиною.



Для досліджень відливались у спеціальному пристрої зразки сірчаноокислого алюмінію визначеної циліндричної форми (діаметром 14 мм і висотою 22 мм) із торцями, захищеними від розчинення спеціальним покриттям (за методикою викладеною в [2]).

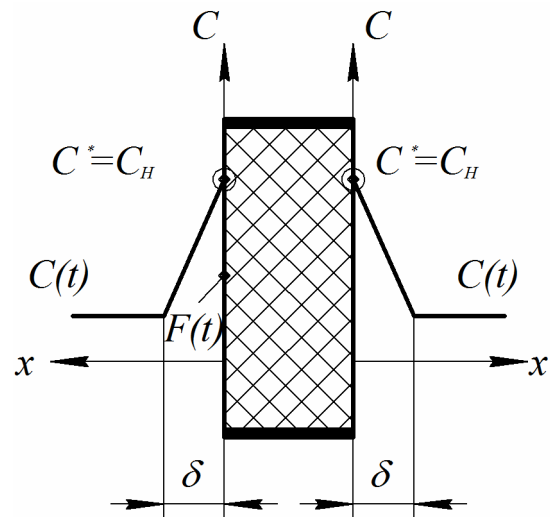
Вплив низькочастотних механічних коливань на зовнішній масообмін вивчався на пілотних моделях вібраційних екстракторів періодичної та неперервної дії [4, 5].

Так, дослідні зразки закріплювались на спеціальному утримувачі і занурювались у заплановану точку вимірювання робочих об'ємів апаратів. Координати точки вимірювання визначались регулюючим пристроєм з лінійками у радіальному напрямку від вісі з кроком 20 мм та по вертикалі з кроком 60 мм. Висота стовпа екстрагенту лишалась сталою. Досліди проводились з використанням листової чайної сировини та шишкового хмелю з гідромодулями у межах (10:1) – (30:1) з кроком (10:1). Частота коливань віброперемішувальної системи змінювалась в межах 3 – 9 Гц, при фіксованій амплітуді 20 мм та 5, 10, 15 мм, відповідно, для періодичного та неперервного процесів. В якості екстрагенту використовувалась вода при температурі 20 °С; фіксований час розчинення дослідних зразків, з визначеною масою до та після розчинення, складав 60 с.

Слід зазначити, що швидкість розчинення хімічно однорідної речовини залежить від опору дифузійного підведення до поверхні розділення фаз розчинника, розчинення речовини на поверхні та відведення її від поверхні в об'єм розчинника [6]. Розподілення концентрації біля поверхні розчинення коментується схемою рис.1. Оскільки в даному випадку остання стадія є лімітуючою, то за такої концентрації речовини на поверхні буде концентрацією насичення і коефіцієнт масовіддачі практично дорівнюватиме коефіцієнту швидкості розчинення зразка  $K_m$ , що визначається з основного диференціального рівняння масопередачі:

$$dm = K_m \cdot F(t) \cdot (C_H - C(t)) dt, \quad (1)$$

де  $m$  – маса речовини, що розчиняється;  $C_H$ ,  $C(t)$  – відповідно концентрація насичення речовини в приміжовому шарі зразка та її поточне значення в основній масі розчинника (екстрагенту);  $F(t)$  – поверхня розчинення зразка;  $t$  – поточний час розчинення.



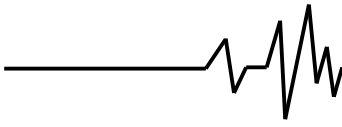
**Рис. 1. Схема розподілення концентрації розчинюваної речовини біля поверхні дослідного зразка:  $F(t)$  – змінна поверхня розчинення;  $C(t)$  – поточна концентрація речовини в основному (робочому) потоці;  $C^*$ ,  $C_H$  – відповідно рівноважна та концентрація насичення речовини на поверхні;  $\delta$  – товщина дифузійного шару**

В умовах дії низькочастотних механічних коливань на двофазову систему виникають пульсуючі, з інтервалом у половину періоду коливань вібросистеми, інтенсивні турбулентні потоки, що поширюються і затухають в робочому об'ємі апарата. Середня швидкість  $\omega_0$  таких потоків сталого напрямку залежить від інтенсивності коливань вібросистеми і визначається як

$$\omega_0 = 2 \cdot A \cdot f \cdot P / (1 - P), \quad (2)$$

де  $A, f$  – відповідно амплітуда та частота коливань;  $P$  – частка живого перерізу вібросистеми.

За методикою проф. Лободи П.П. [3] для спрощення розрахунку  $K_m$  величина  $C$  нехтується, враховуючи її малозначність у порівнянні з концентрацією насичення  $C_H$ . Для динамічного процесу, на наш погляд, ця величина може не враховуватись лише в кінці досліду, коли  $C \approx C_H$ , а не на поточному часовому інтервалі. Через це, з урахуванням сучасних можливостей обчислювальної техніки та з метою одержання більш коректної математичної моделі, нами такі припущення не використовувались, а розв'язок цього питання пропонується наступний.



Відлік поточного часу  $t$  розчинення зразка, що занурений у двофазову систему починається з часу  $t_0$ , тобто з початкового моменту  $\tau_0$  занурення зразка в екстрагент та часу  $\Delta\tau$  його переміщення в екстрагенті до запланованої координатної (робочої) точки занурення:  $t_0 = \tau_0 + \Delta\tau$ . При цьому, маса зразка на поточний момент часу  $t$  становить

$$G(t) = \rho w(t) = \rho \pi [r(t)]^2 \cdot h, \quad (3)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу зразка;  $w(t)$  – зміна об'єму зразка на поточний момент часу  $t$ ;  $h$  – висота зразка (величина стала, оскільки торці зразка вкриті шаром водостійкого лака);

$r(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{\pi \rho h}}$  – змінний у часі радіус зразка.

Тоді, поточне значення поверхні розчинення визначатиметься як

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\pi \cdot r(t) \cdot h = \\ &= 2\pi h \cdot \sqrt{\frac{G(t)}{\pi \rho h}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi h}{\rho}} \cdot \sqrt{G(t)} \end{aligned} \quad (4)$$

а для початкового моменту часу як

$$F(\tau_0) = 2 \sqrt{\frac{\pi h}{\rho}} \cdot \sqrt{G(\tau_0)}. \quad (5)$$

Розглянемо відносну зміну поверхні зразка у часі його розчинення (для всіх  $t, \tau_0$ ):

$$\frac{F(t)}{F(\tau_0)} = \frac{\sqrt{G(t)}}{\sqrt{G(\tau_0)}} \quad (6)$$

Перепозначивши для початкових умов  $F(\tau_0) = F_0$  та  $G(\tau_0) = G_0$ , отримаємо масу зразка на момент його занурення, тобто на момент початку його розчинення в заданій робочій точці екстрагента:

$$G(\pi) = G(\tau_0) - \frac{\theta}{2} = G_0 - \frac{\theta}{2}, \quad (7)$$

де  $\frac{\theta}{2}$  – маса зразка, що розчинилася за час його переміщення від моменту контакту із поверхнею екстрагента до заданої робочої точки (зміна маси за час  $\Delta\tau$  занурення). З урахуванням наведеного маємо:

$$F(t_0) = F_0 \cdot \sqrt{\frac{G_0 - \frac{\theta}{2}}{G_0}} \quad (8)$$

Розглянемо співвідношення поточної, на час  $t$ , та початкової, на час  $t_0$ , поверхонь зразка:

$$\frac{F(t)}{F(t_0)} = \sqrt{\frac{G(t)}{G(t_0)}}; \quad (9)$$

з нього витікає:

$$F(t) = F(t_0) \sqrt{\frac{G(t)}{G(t_0)}} = F(t_0) \sqrt{\frac{G_0 - n(t)}{G_0 - \frac{\theta}{2}}}, \quad (10)$$

де  $n(t)$  – маса речовини зразка, що розчинилася в апараті на поточний час  $t$ . Для процесу розчинення в робочих умовах, тобто в умовах дії на зразок турбулентних потоків екстрагента, в інтервалі  $t_0 = t > t_0$ , поточна маса зразка становитиме

$$G(t) = G(\tau_0) - n(t) = G_0 - n(t), \quad (11)$$

та, відповідно, поточна поверхня зразка

$$F(t) = F_0 \sqrt{\frac{G_0 - \frac{\theta}{2}}{G_0}} \sqrt{\frac{G_0 - n(t)}{G_0 - \frac{\theta}{2}}} = F_0 \sqrt{\frac{G_0 - n(t)}{G_0}}. \quad (12)$$

Складемо та розглянемо рівняння масопередачі для нашого алгоритму:

$$\begin{aligned} dm &= n(t + \Delta t) = \\ &= n(t) + K_m \cdot F(t) \cdot (C^* - C(t)) \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $\Delta t$  – елементарна зміна часу розчинення зразка в екстрагенті, або:

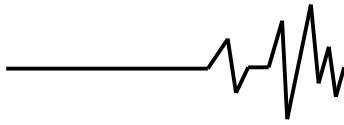
$$\frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} = K_m \cdot F(t) \cdot (C^* - C(t)) \quad (14)$$

де  $K_m$  – коефіцієнт розчинення, м/с;  $C^* = \frac{n^*}{V}$  та

$C(t) = \frac{n(t)}{V}$  – відповідно рівноважна (насичення) та поточна концентрація речовини, що розчиняється;  $V$  – об'єм двофазової системи в апараті;  $n^*$  – поточна рівноважна маса речовини зразка, що розчиняється;  $n(t)$  – поточна складова частина маси  $m(t)$  розчиненої речовини зразка в екстрагенті після занурення в нього зразка. Якщо  $\Delta t \rightarrow a$ , то дістанемо:

$$\frac{dn(t)}{dt} = K_m \cdot F(t) \cdot (C^* - C(t)) \quad (15)$$

та далі, перейшовши до диференціалу функції, матимемо:



$$\begin{cases} \frac{dn(t)}{dt} = K_m \cdot F(t) \cdot \left( \frac{n^*}{V} - \frac{n(t)}{V} \right) = \\ = \frac{K_m \cdot F(t)}{V} \cdot (n^* - n(t)); \\ n(t_0) = \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (16)$$

Наведена система рівнянь описує процес розчинення, коли концентрація речовини в зразку, що знаходиться в робочій точці екстрагента, відповідає умовам початку розчинення (речовини) зразка в цій точці.

Зробимо заміну змінних:  $n(t) = m(t) + \frac{\theta}{2}$ ,

тоді, відповідно до системи (16) дістанемо

$$\begin{cases} \frac{dm(t)}{dt} = \frac{K_m \cdot F(t)}{V} \cdot (m^* - m(t)); \\ m(t_0) = \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

У системі (17) кінцева рівноважна маса розчиненої речовини зразка

$$m^* = n^* - \frac{\theta}{2}, \quad (18)$$

а поточна поверхня розчинення зразка

$$F(t) = F_0 \sqrt{\frac{G_0 - m(t) - \theta/2}{G_0}}. \quad (19)$$

Після підстановки (19) в (17) дістаємо:

$$\begin{cases} \frac{dm(t)}{dt} = \frac{K_m \cdot F_0}{V \cdot \sqrt{G_0}} \cdot \sqrt{G_0 - m(t) - \theta/2} \times \\ \times (m^* - m(t)); \\ m(t_0) = \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (20)$$

Якщо перепозначити складові системи (20) через відповідні коефіцієнти, а саме

$$\alpha = \frac{K_m \cdot F_0}{V \cdot \sqrt{G_0}}; \quad a = G_0 - \frac{\theta}{2}; \quad b = m^*, \text{ то матимемо}$$

$$\begin{cases} \frac{dm(t)}{dt} = \alpha \sqrt{a - m(t)} \cdot (b - m(t)); \\ m(t_0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Для побудови загальної математичної моделі, нами розглянуто умови розчинення дослідного зразка, коли його маса не перевищує рівноважного значення, тобто  $G_0 < n^*$ , або  $G_0 < C^* \cdot V$ , коли його початкова маса  $G_0$  перевищує поточну рівноважну масу

речовини  $n^*$ , тобто  $G_0 > n^*$ , або  $G_0 > C^* \cdot V$ , а також третій випадок, коли початкова маса зразка  $G_0$  дорівнює поточній рівноважній масі речовини  $n^*$ , тобто  $G_0 = n^*$ , або  $G_0 = C^* \cdot V$ .

Відокремивши змінні та проінтегрувавши останню систему рівнянь з відповідними замінами змінних та виконавши ряд алгебраїчних перетворень, дістанемо остаточну розрахункову формулу, що описує динаміку розчинення зразка та дозволяє розраховувати коефіцієнт масовіддачі для опрацьованих трьох випадків насичення дослідною речовиною двофазової системи «тверде тіло – рідина»:

$$K_m = \frac{V \cdot \sqrt{G_0}}{F_0 \cdot (t - t_0 - \Delta t)} \cdot U(t), \quad (22)$$

$$\text{Де } U(t) = \begin{cases} \text{для випадку } G_0 < C^* \cdot V : \\ \frac{2}{P} \left[ \arctg \frac{P_1}{P} - \arctg \frac{\sqrt{G_v(t) + \frac{\theta}{2}}}{P} \right]; \\ \text{для випадку } G_0 > C^* \cdot V : \\ \frac{1}{P_0} \cdot \ln \frac{\left( \sqrt{G_v(t) + \frac{\theta}{2}} + P_0 \right) (P_1 - P_0)}{\left( \sqrt{G_v(t) + \frac{\theta}{2}} - P_0 \right) (P_1 + P_0)}; \\ \text{для випадку } G_0 = C^* \cdot V : \\ 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{G_v(t) + \frac{\theta}{2}}} - \frac{1}{P_1} \right]; \end{cases} \quad (23)$$

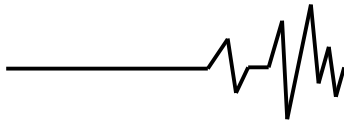
В рівняннях цієї системи:  $P_0 = \sqrt{G_0 - C^* \cdot V}$ ;

$$P_1 = \sqrt{G_0 - \frac{\theta}{2}}; \quad P = \sqrt{C^* \cdot V - G_0}; \quad F_0 = 2\pi \cdot r(\tau_0) \cdot h;$$

$r(\tau_0)$  – радіус зразка до занурення в апарат;

$G_v(t)$  – виміряна маса зразка після вилучення його з апарата.

В наших дослідах коефіцієнти розчинення для всіх запланованих експериментів при періодичному і неперервному віброекстрагуванні визначались за першим рівнянням отриманої математичної моделі системи (23), тобто для умов розчинення, коли маса зразка не перевищує його рівноважного значення  $G_0 < n^*$ .



За даними дослідів встановлювалась залежність коефіцієнта розчинення  $K_m$  від ефективного критерія Рейнольдса, що враховує гідродинамічний режим обтікання досліджуємого зразка в об'ємі апарата:  $K_m = f(Re_e)$ .

Критерій Рейнольдса визначався за рівнянням:  $Re_e = \frac{w_i d_e}{\nu_n}$ , де  $w_i = w_0 \bar{\eta}$  – середньоінтегральна по об'єму апарата швидкість пульсуючих потоків, що генеруються віброперемішувальними пристроями;  $d_e$  – еквівалентний діаметр зразка, що розчинюється;  $\nu_n$  – кінематична в'язкість примежової плівки на поверхні розчинення;  $w_0 = 2Af \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$  – початкова за період коливань швидкість пульсуючих потоків;  $\varepsilon$  – частка живого перерізу апарата в зоні встановлення віброуючого перемішувального пристрою;  $A, f$  – відповідно амплітуда та частота коливань системи віброперемішування;  $\bar{\eta} = \frac{1}{(1+L/D)^m}$  – коефіцієнт затування коливань на відстані  $L$  від

джерела коливань для неперервнодіючого віброекстрактора;  $\eta = \frac{1}{(1+R/D)^m}$  – коефіцієнт затування коливань на відстані  $R$  від вісі симетрії віброуючого пристрою для періодичного процесу;  $D$  – діаметр апарата;  $m = 2 + 0,5 \cdot 10^6 \mu^2 + gB$  – показник степеню, що враховує характер розповсюдження коливань в системі тверде тіло-рідина;  $\mu$  – динамічна в'язкість екстрагента;  $B$  – питоме навантаження апарата по твердій фазі,  $\frac{кг}{м^3}$ ;  $g = 0,006$  – сталий множник при  $B$  [7].

Окремі результати дослідів по встановленню впливу на зовнішній масообмін турбулентних пульсуючих струменів, генерованих переточними елементами віброперемішувальних пристроїв при неперервному і періодичному віброекстрагуванні, узагальнені у функціональних координатах лінійними залежностями, наведеними, як приклад, на рис. 2.

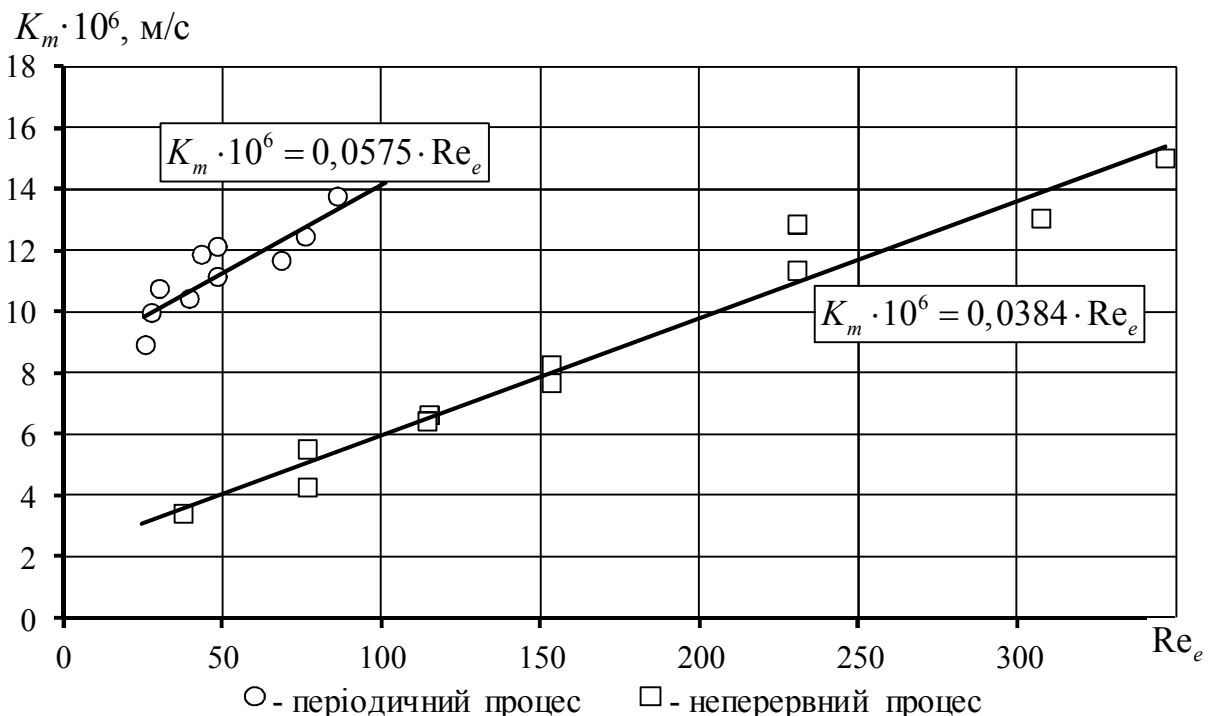
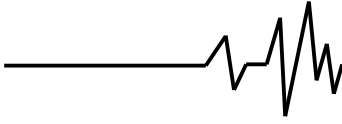


Рис. 2. Узагальнення результатів досліджень масовіддачі при віброекстрагуванні з використанням модельних зразків: 1- періодичний процес; 2- неперервний процес



Як видно з графіка для періодичного процесу віброекстрагування (пряма-1) активізація міжфазової поверхні досягається при числах Рейнольдса в межах від 25 до 100, але при неперервному процесі (пряма-2) таж сама ефективність встановлюється при  $Re = 150 - 300$ . Таке, очевидно, обґрунтовується більшою турбулізацією робочого середовища віброекстрактора періодичної дії, і забезпечується порівняно меншими коефіцієнтами затухання коливань, що наближає структуру потоку до моделі ідеального перемішування.

За результатами експериментів отримано математичні моделі залежності коефіцієнта масовіддачі від основних режимних параметрів процесу періодичного і неперервного віброекстрагування у вигляді  $K_m = f(q, A, f, L)$ .

### Висновок

Запропонована методика оцінення зовнішнього масообміну при віброекстрагування з використанням модельних зразків та отримані математичні моделі можуть бути поширені для цих цілей і на інші типи екстракційного обладнання, з метою оптимізації процесу вилучення цільових компонентів із рослинної сировини.

### Література

1. Экстрагирование. Система твердое тело-жидкость / Г.А. Аксельруд, В.М. Лысянский.- Л.:Химия, 1974. С.167.
2. Зав'ялов В.Л., Лобок О.П., Попова Н.В., Бодров В.С. Математична модель зовнішнього масообміну періодичного віброекстрагування із рослинної сировини// Наукові праці О НАХТ. - №32. – с. 88-93.
3. Стабников В.Н., Лобода П.П. Исследование влияния низкочастотных механических колебаний на скорость массоотдачи при растворении твердых тел // Массообменные процессы хим. технологии. Сб. аннотаций. – Ленинград: Химия, 1965. – С. 124 – 126.
4. Пат. 25090 України. Вібраційний екстрактор / В.Л. Зав'ялов, Н.В. Попова. Заявл. 22.03.07; Опубл. 25.07.07 Бюл. №1.
5. Пат. 27705 України. Вібраційний екстрактор / В.Л. Зав'ялов, В.С. Бодров, Ю.В. Запорожець; опубл. 12.11.07, Бюл. №18.
6. Массообменные процессы химической технологии (системы с дисперсной твердой фазой / П.Г. Романков, В.Ф. Фролов. – Л.: Химия, 1990. – С.92.
7. Стратиенко О.В., Лобода П.П., Лысянский В.М. Влияние низкочастотных механических колебаний на экстракцию сахара из свекличной стружки. – Изв. ВУЗов, Пищевая технология, 1970, №5, с. 88 – 92.