

Логвиненко Е.А.

Силич-Балгабаева В.Б.

Днепропетровский  
национальный  
университет  
имени О. Гончара

УДК 534.014+621.86

**ДИНАМИКА ВИБРОСИСТЕМЫ  
С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ  
АСИММЕТРИЧНОГО ТИПА  
В ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЕ**

Наведені результати теоретичних досліджень динаміки вібросистеми, яка містить нелінійні приводні елементи з асиметричною пружною характеристикою.

Presents the results of theoretical studies of the dynamics of vibrating system containing non-linear drive elements with asymmetric elastic characteristic

В настоящее время большинство созданных вибротехнологий реализуют симметричные нелинейные колебания [1]. В то же время значительное число вибротехнологий требует одностороннего воздействия на обрабатываемый материал (уплотнение бетонных смесей, грунтов, разрушение смерзшихся железнодорожных грузов, забивка свай и т.п.), что свидетельствует о целесообразности использования асимметричных циклов колебаний, когда при движении рабочего органа в разные стороны реализуются различные по величине ускорения. Полезная работа в созданных вибротехнологиях выполняется при ускорениях до  $60-80 \text{ м/с}^2$  и нет необходимости при обратном «балластном» ходе рабочего органа создавать такие же большие ускорения. Реализация несимметричных колебаний снижает не только напряженность металлоконструкций, но и расход электроэнергии, уровень шума [2].

Результаты исследований вибротехнологий показывают, что асимметричные колебания можно генерировать как с помощью бигармонического вибровозбудителя, так и путем односторонней установки основных буферов в машинах. Динамика таких систем исследована и нашла отражение в созданных конструкциях виброплощадок, конвейеров, виброрыхлителей [3]. Однако реализация асимметричных колебаний может быть достигнута и за счет поиска новых технических решений. Поэтому целью настоящей работы является разработка и исследование динамики вибротехнологий с нелинейностью асимметричного типа в приводных упругих связях, что позволит получать режимы с высоким вкладом четных

гармоник, определяющих степень асимметрии ускорений.

На рис. 1 представлена расчетная схема вибротехнологии с асимметричной кусочно-линейной характеристикой приводных упругих связей.

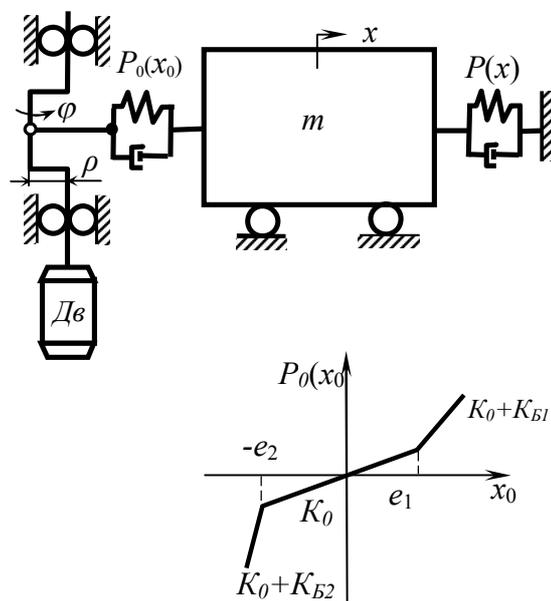
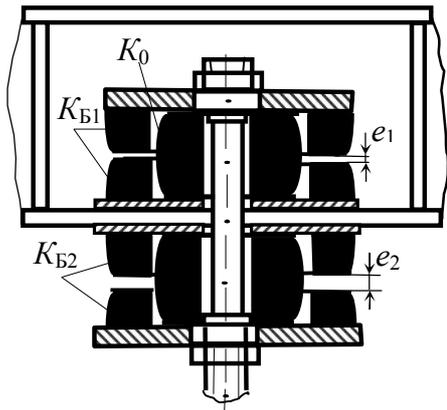


Рис. 1 Расчетная схема вибротехнологии

На рис. 2 показано конструктивное решение закрепления буферов в шатуне эксцентриково-шатунного привода.



**Рис. 2 Конструктивное решение закрепления буферов в шатуне эксцентриково-шатунного привода**

Уравнения движения одномассной системы с нелинейным приводом и двигателем ограниченной мощности имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \mu K_1 \dot{x} + K_1 x = P_0(x_0) + f_0(x_0)\dot{x}_0, \\ \mathfrak{J}\ddot{\varphi} + \rho \cos \varphi [P_0(x_0) + f_0(x_0)\dot{x}_0] = \\ = L(\dot{\varphi}) - \mu_0 \rho |P_0(x_0) + f_0(x_0)\dot{x}_0|, \end{cases}$$

где  $m$  – масса рабочего органа;

$K_1$  – жесткость основных упругих элементов;

$x_0 = \rho_0 \sin \varphi_1 - x$  – деформация приводных упругих связей;

$\rho$  – эксцентриситет ведущего вала;

$\mu_0$  – коэффициент трения в подшипниках ведущего звена, приведенный к эксцентриситету  $\rho$ ;

$P_0(x_0)$  – нелинейная асимметричная упругая характеристика приводных связей;

$L(\dot{\varphi})$  – момент двигателя;

$\mathfrak{J}$  – момент инерции вращающихся масс.

В конкретной рассматриваемой системе характеристика упругой восстанавливающей силы имеет вид

$$P_0(x_0) = K_0 x_0 + P_1(x_0),$$

$$P_1(x_0) = \sigma_1 K_{Б1} (x_0 - e_1) + \sigma_2 K_{Б2} (x_0 + e_2);$$

$$f_0(x_0) = \mu (K_0 + \sigma_1 K_{Б1} + \sigma_2 K_{Б2});$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } x_0 \leq e_1, \\ 1, & \text{при } x_0 > e_1 \end{cases} \quad \sigma_2 = \begin{cases} 0, & \text{при } x_0 \geq -e_2, \\ 1, & \text{при } x_0 < -e_2 \end{cases}$$

Поскольку нелинейную характеристику восстанавливающей силы имеют приводные упругие элементы, то целесообразно перейти к новой переменной  $x_0$  – деформации приводных упругих элементов. Введем замену

$$x = \rho \sin \varphi - x_0.$$

Рассмотрим вынужденные колебания в области основного резонанса. Допустим, что разница между частотой собственных колебаний  $\omega$  и частотой возмущающей силы  $\nu$  мала и отразим эту малость в явном виде путем введения безразмерного малого параметра  $\varepsilon$ :  $\Theta = \omega - \nu = \varepsilon \alpha$ . Чтобы воспользоваться методом Крылова-Боголюбова при построении приближенных решений, необходимо сделать формальное предположение о малости сил, возникающих в нелинейных элементах приводных упругих связей

$$P_0(x_0) = K_0 x_0 + \varepsilon P'_0(x_0).$$

Тогда уравнения движения в виде, содержащем малый параметр, будут иметь вид

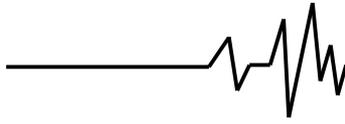
$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = \varepsilon [\rho (\omega_1^2 - \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + q_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ + \rho \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{m} (P_0(x_0) + f_0(x_0)\dot{x}_0)], \\ \ddot{\varphi} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\mathfrak{J}} L(\dot{\varphi}) - q_2 |P_0(x_0) + f_0(x_0)\dot{x}_0| - \right. \\ \left. - q_3 \cos \varphi [P_0(x_0) + f_0(x_0)\dot{x}_0] \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } \omega^2 = \frac{K_0 + K_1}{m}; \quad \omega_1^2 = \frac{K_1}{m};$$

$$q_1 = \frac{\rho \mu K_1}{m}; \quad q_2 = \frac{\mu_0 \rho}{\mathfrak{J}}; \quad q_3 = \frac{\rho}{\mathfrak{J}}.$$

После приведения системы уравнений (1) к стандартной форме, в соответствии с асимптотическим методом [4] будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \Theta &= \nu + \varepsilon E_1(\varphi, \nu, a, \xi) + \varepsilon^2 \dots; \\ A_0 &= a_0 + \varepsilon E_2(\varphi, \nu, a, \xi) + \varepsilon^2 \dots; \\ \gamma &= \xi + \varepsilon E_3(\varphi, \nu, a, \xi) + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \quad (2)$$



где  $\varepsilon E_1(\varphi, \nu, a, \xi)$ ,  $\varepsilon E_2(\varphi, \nu, a, \xi)$ ,  $\varepsilon E_3(\varphi, \nu, a, \xi)$  – малые периодические функции.

Используя результаты по исследованию динамики вибросистемы, содержащей нелинейные приводные упругие элементы с симметричной характеристикой восстанавливающей силы [5], в рамках первого приближения аналогично найдем  $\nu$ ,  $a_0$ ,  $\xi$  для нелинейности асимметричного типа.

$$G_1(a_0) = \frac{a_0}{\pi} \left[ 2K_0 f_1(z_3) + \frac{\pi}{2z_3} + K_{B1} f_1(z_1) + K_{B2} f_1(z_2) \right];$$

$$G_2(a_0, \xi) = \frac{1}{4} h_1 a_0 \sin(\xi + \alpha_2) \times [2K_0 + K_{B1} f(z_1) + K_{B2} f(z_2)];$$

$$z_3 = \frac{a_0}{d_0}; f_1(z_3) = \sqrt{1 - \frac{1}{z_3^2}} + \frac{1}{z_3} \arcsin \frac{1}{z_3} - \frac{\pi}{2z_3}.$$

Коэффициент упругости и коэффициент затухания эквивалентной линеаризованной системы соответственно будут иметь вид

$$K_e(a_0) = K_1 + K_0 + (K_{B1} f(z_1) + K_{B2} f(z_2)) / 2;$$

$$\lambda_e(a_0) = \mu [K_1 + K_0 + (K_{B1} f(z_1) + K_{B2} f(z_2))] / 2,$$

где

$$f(z_{1,2}) = 1 - \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{z_{1,2}} + \frac{1}{z_{1,2}} \sqrt{1 - \frac{1}{z_{1,2}^2}} \right).$$

Наличие различной жесткости приводных буферов приведет к смещению центра колебаний системы относительно положения статического равновесия на некоторую величину  $d_0$ , и закон деформации приводных упругих элементов в первом приближении будет иметь вид

$$x_0 = d_0 + a_0 \sin(\varphi + \xi),$$

где  $\xi$  – сдвиг фаз между деформацией приводных элементов и углом поворота эксцентриквой части вала

$$\xi = \arctg \frac{2\nu \delta_e}{\omega_e^2 - \nu^2} + \psi.$$

Величину динамического смещения  $d_0$  определим из условия равенства статических сил в левой и правой частях первого уравнения системы (1). Найдем нулевой член в разложении в ряд Фурье функции  $P_1(x_0)$  при  $x_0 = d_0 + a_0 \sin(\varphi + \xi)$ :

$$b_0 = \frac{2}{\pi} a_0 K_{B1} f_1(z_1) - \frac{2}{\pi} a_0 K_{B2} f_2(z_2);$$

$$z_1 = \frac{a_0}{e_1 - d_0}; z_2 = \frac{a_0}{e_2 + d_0};$$

$$f_1(z_1) = \sqrt{1 - \frac{1}{z_1^2}} + \frac{1}{z_1} \arcsin \frac{1}{z_1} - \frac{\pi}{2z_1};$$

$$f_2(z_2) = \sqrt{1 - \frac{1}{z_2^2}} + \frac{1}{z_2} \arcsin \frac{1}{z_2} - \frac{\pi}{2z_2}.$$

Из системы (1) находим

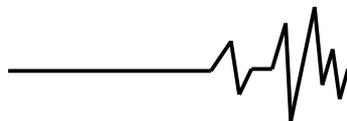
$$d_0 \omega^2 = \frac{b_0}{2m}.$$

Для определения динамического смещения  $d_0$  получим уравнение

$$d_0 + \frac{a_0}{\pi(K_1 + K_{B1})} (K_{B1} f_1(z_1) - K_{B2} f_2(z_2)) = 0.$$

Перейдем теперь к уточнению первого приближения исходных уравнений в соответствии с формой (2). Определим функции  $\varepsilon E_1(\varphi, \nu, a, \xi)$  и  $\varepsilon E_2(\varphi, \nu, a, \xi)$  в улучшенном первом приближении, воспользовавшись асимптотическим методом в несколько видоизмененной форме, предложенным В. К. Пресняковым и З. С. Филером [6]. Функция  $\varepsilon E_1$  связана с неравномерностью вращения ведущего вала.

$$\varepsilon E_1 = \frac{1}{\mathfrak{J}} \int \left[ \frac{1}{\nu} F_2(a_0 \sin(\varphi + \xi), a \omega \cos(\varphi + \xi)) - c \right] d\varphi,$$



$c$  – правая часть равенства, полученная в рамках первого приближения

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{v} \left( \frac{1}{\mathfrak{S}} L(v) - q_2 G_1(a_0) - q_3 G_2(a_0, \xi) \right);$$

$F_2$  – правая часть второго уравнения системы (1) при подстановке  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ , соответствующих первому приближению.

В эту часть входят функции  $R$  и  $|R|$ . Если их разложить в ряд Фурье при  $x_0 = d_0 + a_0 \sin(\varphi + \xi)$  и ограничиться соответственно первыми четырьмя и тремя членами разложения, то получим

$$\begin{aligned} R &= \frac{a_0}{\pi} \left[ \frac{\pi K_0}{z_3} + K_{B1} f_1(z_1) - K_{B2} f_1(z_2) \right] + \\ &\frac{a_0}{2} [2K_0 + K_{B1} f(z_1) + K_{B2} f(z_2)] \sin(\varphi + \xi) - \\ &-\frac{2a_0}{3\pi} \left[ K_{B1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} - K_{B2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \cos 2(\varphi + \xi) - \\ &-\frac{2a_0}{3\pi} \left[ K_{B1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} + K_{B2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \sin 3(\varphi + \xi); \\ |R| &= \frac{a_0}{\pi} \left[ 2K_0 \left( f_1(z_3) + \frac{\pi}{2z_3} \right) + K_{B1} f_1(z_1) + K_{B2} f(z_2) \right] + \\ &+\frac{a_0}{2} [2K_0(1-f(z_3)) + K_{B1} f(z_1) - K_{B2} f(z_2)] \sin(\varphi + \xi) - \\ &-\frac{4a_0}{3\pi} \left[ K_0 \left(1 - \frac{1}{z_3^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{K_{B1}}{2} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{K_{B2}}{2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \cos 2(\varphi + \xi). \end{aligned}$$

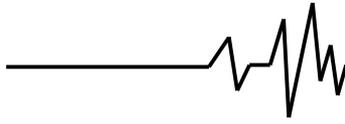
Аналогично получим выражение для  $\varepsilon E_1$ :

$$\varepsilon E_1 = \frac{1}{\mathfrak{S}v} [M_1 \sin(\varphi + \gamma_1) + M_2 \sin(2\varphi + \gamma_2)],$$

где  $M_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ ;  $M_2 = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ ;

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{B_2}{B_1}; \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{D_2}{D_1};$$

$$\begin{aligned} B_1 &= -\rho a_0 \left[ \frac{K_0}{z_3} + \frac{1}{\pi} (K_{B1} f_1(z_1) - K_{B2} f_1(z_2)) \right] - \\ &-\mu_0 \rho a_0 \left[ K_0 [1-f(z_3)] + \frac{1}{2} (K_{B1} f(z_1) - K_{B2} f(z_2)) \right] \sin \xi - \\ &-\frac{\rho a_0}{3\pi} \left[ K_{B1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} - K_{B2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \cos 2\xi; \\ B_2 &= \mu_0 \rho a_0 \left[ K_0 [1-f(z_3)] + \frac{K_{B2} f(z_2)}{2} \right] \cos \xi + \\ &+\frac{\rho a_0}{3\pi} \left[ K_{B1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} - K_{B2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \sin 2\xi; \\ D_1 &= -\frac{1}{8} \rho a_0 [2K_0 - K_{B1} f(z_1) + K_{B2} f(z_2)] \sin \xi + \\ &+\frac{2\mu \rho a_0}{3\pi} \left[ K_0 \left(1 - \frac{1}{z_3^2}\right)^{\frac{3}{2}} + K_{B1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} K_{B2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \cos 2\xi + \\ &+\frac{1}{6} \frac{\rho a_0}{\pi} \left[ \frac{K_{B1}}{z_1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{K_{B2}}{z_2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \sin 2\xi; \\ D_2 &= \frac{1}{8} \rho a_0 [2K_0 + K_{B1} f(z_1) + K_{B2} f(z_2)] \cos \xi + \\ &+\frac{2\mu \rho a_0}{3\pi} \left[ K_0 \left(1 - \frac{1}{z_3^2}\right)^{\frac{3}{2}} + K_{B1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} K_{B2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \sin 2\xi - \\ &-\frac{1}{6} \frac{\rho a_0}{\pi} \left[ \frac{K_{B1}}{z_1} \left(1 - \frac{1}{z_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{K_{B2}}{z_2} \left(1 - \frac{1}{z_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \cos 2\xi. \end{aligned}$$



Улучшенное выражение для угловой скорости ведущего звена имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = v + \frac{1}{\mathfrak{I}v} [M_1 \sin(\varphi + \gamma_1) + M_2 \sin(2\varphi + \gamma_2)]. \quad (3)$$

Момент двигателя

$$M(\varphi) = M_C - \frac{1}{vT_M} [M_1 \sin(\varphi + \gamma_1) + M_2 \sin(2\varphi + \gamma_2)],$$

$T_M$  – электромеханическая постоянная времени двигателя.  
Эквивалентный из условий нагрева момент

$$M_{\mathfrak{I}} = \sqrt{M_C^2 + \frac{M_1^2 + M_2^2}{2v^2 T_M^2}}$$

не должен превышать номинального момента ранее принятого двигателя. В соответствии с (3) неравномерность вращения ведущего звена

можно оценить величиной  $\Delta = \frac{M_1 + M_2}{\mathfrak{I}v^2}$ . Для

нормальной работы двигателя должно выполняться условие  $\Delta < 0,03$ , из которого легко определить величину момента инерции вращающихся масс  $\mathfrak{I}$ , обеспечивающую работу выбранного двигателя в приемлемом тепловом режиме. Здесь все моменты приведены к валу вибровозбудителя колебаний.

Для функции  $\varepsilon E_2$ , связанной с высшими гармониками от нелинейных асимметричных буферов, согласно [5] получим следующее выражение

$$\varepsilon E_2 = -a_{02} \cos 2(\varphi + \xi) - a_{03} \cos 3(\varphi + \xi),$$

$$a_{02} = \frac{2}{9} \frac{a_0}{\pi m v^2} \left[ K_{B1} \left( 1 - \frac{1}{z_1^2} \right)^{3/2} - K_{B2} \left( 1 - \frac{1}{z_2^2} \right)^{3/2} \right],$$

$$a_{03} = \frac{1}{12} \frac{a_0}{\pi m v^2} \left[ K_{B1} \left( 1 - \frac{1}{z_1^2} \right)^{3/2} + K_{B2} \left( 1 - \frac{1}{z_2^2} \right)^{3/2} \right].$$

Закон колебаний рабочего органа и деформация приводных упругих элементов имеют вид

$$x = a \sin(\varphi - \alpha) + a_{02} \cos 2(\varphi + \xi) + a_{03} \sin 3(\varphi + \xi) - d_0;$$

$$x_0 = a_0 \sin(\varphi + \xi) - a_{02} \cos 2(\varphi + \xi) - a_{03} \sin 3(\varphi + \xi) + d_0,$$

где  $\alpha$  – фазовый угол между перемещением рабочего органа и деформацией приводных упругих элементов и определяется выражением

$$\alpha = \arctg \frac{\mu v^3}{\omega_e (a_0) (1 + \mu^2 v^2) - v^2}.$$

**Выводы:** Полученные зависимости позволяют проводить инженерный расчет, анализ и синтез систем с асимметричной нелинейностью в шатуне вибровозбудителя, с учетом улучшенных первых приближений уточнить влияние двигателя на вибросистему. Анализ высших гармоник позволяет решить вопрос о необходимом моменте инерции вращающихся масс, о рациональной нелинейности и жесткости приводных буферов.

#### Литература

1. Потураев В.Н. Вибрационная техника и технологии в энергоемких производствах. /В.Н. Потураев, В.П. Франчук, В.П. Надутый. – Днепропетровск: Национальная горная академия Украины, 2002. – 186 с.
2. Ударно-вибрационная технология уплотнения бетонных смесей. / Б. В. Гусев, А. Д. Деминов, Б. И. Крюков Логвиненко Е.А. и др. – М.: Стройиздат, 1982. – 152 с.
3. Логвиненко Е.А. Исследование и создание вибрационных машин строительного типа / Е.А. Логвиненко //Вибрации в технике и технологиях. – 2003. – №1(27). – С. 80-83.
4. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний /Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М., Физматгиз, 1963. – 410 с.
5. Литвин Л. М. Исследование динамики резонансных вибромашин с нелинейным основным приводом, возбуждаемым двигателем ограниченной мощности упругими связями /Л. М. Литвин //Динамическая прочность и устойчивость элементов крупных машин. – 1973. – Вып. 1. – С. 85-97.
6. Пресняков В. К. Колебания двухмассных вибрационных машин с нелинейными упругими связями. /В. К. Пресняков, З. Е. Филер// Разработка месторождений полезных ископаемых. – Киев, 1966. – Вып. 6. – С. 46-60.