**Анциферов А.В.**

*Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет»*

*УДК 531.3*

# ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВИБРАЦИОННОЙ МЕЛЬНИЦЫ КАК ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

*Порівняно вирази для визначення параметрів руху віброударної системи точним та наближеним методами.*

*The comparison of expressions for the motion parameters of a vibro-impact system determination by the exact and the approximate methods.*

***Постановка задачи.*** Проектирование вертикальных вибрационных мельниц (МВВ) проводится на основании динамического расчета, в котором данную систему рассматривают как двухмасную вибрационную [1]. Но основным достоинством их является возможность реализации виброударного режима измельчения, что попутно с диспергированием материала позволяет проводить его активацию. Поэтому для выбора и обоснования рациональных технологических параметров работы необходимо провести дополнительное исследование взаимодействия рабочего органа и загрузки как виброударной системы. Особенность данного подхода состоит в том, что кроме амплитуды и частоты колебаний рабочего органа МВВ надо учитывать зазор Δ между крышкой помольной камеры и верхним слоем технологической загрузки (помольные тела, обычно стальные шары). Важное значение приобретает учет этой особенности при соизмеримости масс системы камера – технологическая загрузка, что имеет место в МВВ.

***Целью статьи*** является определение технологических параметров работы МВВ точным и приближенным способами и сравнение результатов для дальнейшего развития данного метода с учетом большего числа учитываемых параметров.

**1. Точное решение.** Рассмотрим относительно простую систему, в которой загрузка рассматривается как единичная масса, взаимодействующая только с днищем камеры. Динамическая модель мельницы показана на рис. 1. На массу помольной камеры $m_1$ действует гармоническое усилие, создаваемое самобалансным эксцентриковым вибровозбудителем. Удар загрузки о днище считаем абсолютно неупругим.

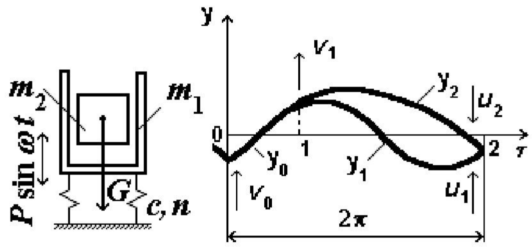


***Рис. 1. Динамическая модель и расчетная схема***

Исследуем граничный случай, когда отсутствует участок совместного движения элементов системы. В этом случае технологическая загрузка $m_2$ движется в режиме непрерывного подбрасывания. Временем ударного взаимодействия пренебрегаем. Движение камеры и загрузки описываются уравнениями

$$(m_0+m_1)\ddot{y}_1^* + 2n\dot{y}_1^* + cy_1^* = m_0 r\omega^2 \sin(\omega t+\varphi),$$

$$\ddot{y}_2^* = -g \ ,$$

где φ – фазовый сдвиг внешней силы по отношению к началу отсчета времени,

$m_0$ – масса инерционного привода,

$r$ – его эксцентриситет.

Запишем дифференциальные уравнения движения элементов системы между соударениями в безразмерном виде

$$\ddot{y}_1 + 2\alpha\zeta\dot{y}_1 + \zeta^2 y_1 = \sin(\tau+\varphi), \qquad (1)$$

$$\ddot{y}_2 = -\zeta^2 P, \qquad (2)$$

где $$y_i^* = y_i \frac{m_0 r}{m_0+m_1} \ (i=1,2),$$

$$\omega_0 = \frac{c}{m_0 + m_1},\ \zeta = \frac{\omega_0}{\omega},\ P = \frac{(m_0 + m_1)g}{m_0 r \omega_0^2},$$

$$\alpha = \frac{n}{(m_0 + m_1)\omega_0},\ \tau = \omega t,\ \ \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}.$$

Решения уравнений (1) и (2) имеют вид

$$y_1 = \exp(-\alpha\zeta\tau)(C_1 \sin\ \zeta\tau + C_2 \cos\zeta\tau) + q^{-1} \sin\ (\tau + \varphi_0), \quad (3)$$

$$y_2 = -\zeta^2 P \frac{\tau^2}{2} + C_3\tau + C_4\,, \quad (4)$$

где $q = \sqrt{(\zeta^2 - 1)^2 + 4\alpha^2\zeta^2}$ , $\varphi_0 = \varphi - \varepsilon$ ,

$\operatorname{tg}\varepsilon = 2\alpha\zeta \big/ (\zeta^2 - 1)$.

Движения элементов системы подчинены следующим условиям периодичности

$$y_1(0) = y_1(2\pi),\ y_2(0) = y_2(2\pi), \\ y_1(0) = y_2(0),\ \ \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = -\dot{y}_2(2\pi). \quad (5)$$

Условие абсолютно неупругого соударения масс имеет вид

$$m_1\dot{y}_1(0) + m_2\dot{y}_2(0) = m_1\dot{y}_1(2\pi) + m_2\dot{y}_2(2\pi).$$

С учетом условия (5) получим

$$(\mu + 2)\dot{y}_1(0) = \mu\dot{y}_1(2\pi)\,, \quad (6)$$

где $\mu = (m_0 + m_1)/m_2$ .

После подстановки уравнений (3) и (4) в условия (5) и (6) имеем

$$\left.\begin{aligned} & C_1 = \frac{2\pi\zeta\ P}{\mu B}\left[1 - \exp\,(-\alpha\beta)\cos\beta\right], \\ & C_2 = \frac{2\pi\zeta\ P}{\mu B}\exp\,(-\alpha\beta)\sin\ \beta\,, \\ & C_3 = \pi\zeta^2 P, \quad C_4 = C_2 + q^{-1}\sin\ \varphi_0\,, \\ & \cos\varphi_0 = \pi\zeta^2 qKP, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где $\beta = 2\pi\zeta$ ,

$B = \exp(-\alpha\beta)\left[2\cos\beta \text{ - } \exp(\text{-}\alpha\beta)\right]\text{-}1,$

$K = 1 - \dfrac{2}{\mu B}\left[1 - \exp(-\alpha\beta)(\cos\beta + \alpha\sin\beta)\right].$

Режим непрерывного подбрасывания соответствует мгновенному отрыву загрузки от днища камеры в следующий после контакта момент. При выбранной системе отсчета перемещений это означает выполнение условия

$$\ddot{y}_1(0) = -g\ ,$$

или в безразмерном виде

$$\ddot{y}_1(0) = -\zeta^2 P\,. \quad (8)$$

Подставляя (3) в (8) получим

$$-\zeta^2(C_2 + 2\alpha\ C_1) - q^{-1}\sin\ \varphi_0 = -\zeta^2 P\,.$$

Заменяя постоянные интегрирования их выражениями из (7) имеем

$$1 - \frac{2\pi\zeta}{\mu B}\left[e^{-\alpha\beta}\ (\sin\beta - 2\alpha\cos\beta) + 2\alpha\right] = \\ = \pm\frac{1}{qP}\sqrt{1 - \cos^2\varphi_0}\,. \quad (9)$$

Знак в правой части (9) определяется величиной параметра $\zeta$. Из принятых нами обозначений следует, что к зарезонансной области, в которой работают мельницы с инерционным приводом, относится интервал $\zeta < 1$. Для проведения данного исследования рассмотрим интервал $0 < \zeta < 2$. Учитывая, что параметр *P* может принимать только положительные значения, из (9) после преобразований получим

$$\frac{1}{P_1} = \frac{\mu}{1+\mu}\zeta^2 q\sqrt{N^2 + \pi^2 K^2}\ , \quad (10)$$

где $P_1 = \dfrac{(m_0 + m_1 + m_2)g}{m_0 r\omega_0^2}$,

$$N = 1 - \frac{\beta}{\mu B}\left[\begin{aligned} & e^{-\alpha\beta}\sin\beta + \\ & 2\alpha\left(1 - e^{-\alpha\beta}\cos\beta\right)\end{aligned}\right].$$

Из равенства (10) определяются значения возмущающего усилия, обеспечивающие взаимодействие камеры и загрузки в режиме непрерывного подбрасывания. Отметим, что данный режим существует и является устойчивым в некоторой области значений параметра $P_1$, а не только на линии, определяемой зависимостью (10). Для построения этих границ требуется исследование полученного решения на устойчивость методом припасовывания. В нашем случае мы получили аналитическую зависимость для нижней границы возмущающего усилия $P_1$. Для практического применения при определении параметров работы МВВ достаточно знать нижнюю границу величины $1/P_1$, т.к. рабочее значение возбуждающего усилия $m_0 r\omega_0^2$ должно находится ниже. Это вызвано двумя причинами. Во-первых, мы предохраняем себя от технологических несовершенств и возможных разбросов параметров работы электродвигателя и мельницы в целом. Во-вторых, максимальная скорость ударного взаимодействия загрузки и камеры также находится в области работы камеры и загрузки с «прилипанием». Поэтому при инженерной оценке величины возбуждающего усилия сложный расчет на устойчивость методом припасовывания оказывается излишним.

**2. Приближенное решение.**

При аналитическом исследовании виброударных систем часто пользуются методом припасовывания. В некоторых простых случаях он позволяет получить точное решение задачи динамики. В то же время для анализа такого рода существенно нелинейных систем разработаны и приближенные методы [2, 3]. Для оценки их эффективности необходимо провести сравнение с известными точными решениями, существующими для определенных практически важных случаев.

Рассмотрим решение данной задачи приближенным методом, предложенным в [3]. Известно, что для вибрационной системы с малым значением коэффициента диссипации отличие ее амплитудно-частотной характеристики от упругой системы имеет место только в области резонанса. Таким образом при построении амплитудно-частотной характеристики изучаемой системы можно воспользоваться более простыми зависимостями, произведя в дальнейшем срезку полученной кривой на резонансном уровне.

Покажем, что данное упрощение можно провести и для виброударной системы со слабым демпфированием. Методика упрощения зависимости (10) будет следующей. Строим кривую для системы без демпфирования и затем производим срезку на уровне параметра $1/P_{0r}$, соответствующего системе с демпфированием на резонансной частоте.

При малых рассеяниях энергии уравнение (1) и его решение (3) имеют вид

$$\ddot{y}_1 + \zeta^2 y_1 = \sin(\tau + \varphi),$$

$$y_1 = C_1 \sin\ \zeta\tau + ,,_2 \cos\zeta\tau + \frac{1}{\zeta_1^{\,2} - 1}\sin(\tau + \varphi). \quad (11)$$

Подставляя (4) и (11) в условия (5) и (6) получим выражения для неизвестных

$$C_1 = \frac{-\pi\zeta\ P}{\mu},\ C_2 = \frac{-\pi\zeta\ P}{\mu\ \mathrm{tg}(\pi\zeta)},\ C_3 = \pi\zeta^2 P,$$

$$C_4 = C_2 + \frac{1}{\zeta^2 - 1}\sin\varphi,\ \cos\varphi = \frac{\mu + 1}{\mu}\pi\zeta^2(\zeta^2 - 1)\,P.$$

Теперь из условия (8) определяем нижнее значение границы устойчивости

$$\frac{1}{P_0} = \zeta^2\left|\zeta^2 - 1\right|\sqrt{\frac{\mu^2}{(\mu+1)^2}\left(1 + \frac{\pi\zeta}{\mu\,\mathrm{tg}\,\pi\zeta}\right)^2 + \pi^2}\,. \quad (12)$$

Здесь параметр $P_0$ соответствует параметру $P_1$ в (10).

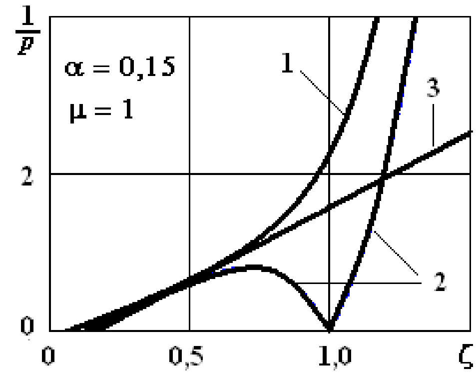


*Рис. 2. Зависимости возбуждающего усилия от частоты:* 1 – $1/P_1(\zeta)$; 2 – $1/P_0(\zeta)$; 3 – $1/P(\zeta)$

На рис. 2 показаны кривые, построенные по формуле (10) для системы с малым рассеянием энергии (кривая 1) и (12) для случая отсутствия диссипативной силы (кривая 2). Существенное отличие между ними имеет место только в области резонанса. Здесь следует отметить, что справа от ординаты $\zeta = 1$ различие между зависимостями больше, чем слева. Рабочие режимы МВВ с инерционным приводом, для которой предлагается этот метод расчета, являются зарезонансными ($\zeta < 1$).

Определим теперь уровень «срезки» зависимости (12). Если частота внешнего воздействия выше собственной частоты системы то естественно предположить, что инерционный и упругий члены в (1) существенно превышают диссипативную силу и внешнее воздействие. Тогда уравнение (3) можно заменить уравнением свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления

$$\ddot{y}_1 + \zeta^2 y_1 = 0\,. \quad (13)$$

Отметим еще один важный момент. Т.к. мы рассматриваем двухмассную виброударную систему, то величина внешнего воздействия также зависит от соотношения между массами. Поэтому при достаточно малом значении параметра μ существенно увеличиваются потери энергии при ударе. Данный вывод следует иметь в виду при использовании приближенных методов расчета многомассных виброударных систем [3].

Решение (13) имеет вид

$$y_1 = C_1 \sin\ \zeta\tau + C_2 \cos\zeta\tau\ . \quad (14)$$

Для существования таких движений в реальной системе, обладающей диссипативными свойствами, необходимо, чтобы работа сил сопротивления на этих свободных колебаниях не превышала работу внешних сил. Это условие имеет вид

$$\left|A_d + \Delta W\right| \le \left|A_P\right| \qquad (15)$$

где $A_d$, $A_P$ – работа диссипативных сил и сил возбуждения соответственно,

$\Delta W$ – потери энергии при ударе.

Подчиняя (14) первому условию (5) и условию (8) получаем уравнение

$$y_1 = \frac{P}{\cos \pi\zeta} \cos(\zeta\tau - \pi\zeta).$$

Это решение разлагается в ряд Фурье

$$y_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos i(\tau + \gamma), \qquad (16)$$

где $a_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y_1(\tau)\sin i\tau d\tau = \frac{2P(\zeta \sin \pi\zeta - i \sin \pi i)}{\pi(\zeta^2 - i^2)\cos \pi\zeta}$.

Теперь величина $A_d$ определится в виде

$$A_d = \int_0^{2\pi} 2\alpha\zeta\ \dot{y}_1^2 d\tau =$$

$$= 2\alpha\zeta \int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i i \sin i(\tau+\gamma)\right)^2 d\tau = .$$

$$= 2\pi\alpha\zeta \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 i^2$$

Для упрощения выражений ограничимся рассмотрением потерь по первой гармонике

$$A_d \approx 2\pi\alpha\zeta a_1^2 = 2\pi\alpha\zeta\left(\frac{2\zeta P \operatorname{tg}\pi\zeta}{\pi(\zeta^2 - 1)}\right)^2 = \frac{8\alpha\zeta P^2}{\pi(\zeta^2-1)^2}\operatorname{tg}^2\pi\zeta. \qquad (17)$$

Так как удар считаем абсолютно неупругим, потери энергии в размерных величинах определятся из выражения

$$\Delta W^* = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left[\dot{y}_1^*(2\pi) - \dot{y}_2^*(2\pi)\right]^2.$$

В безразмерных величинах данное выражение имеет вид

$$\Delta W = \frac{\zeta^2 k_W}{2(\mu+1)P^2}\left[\dot{y}_1(2\pi) - \dot{y}_2(2\pi)\right]^2,$$

где $k_W = (m_0 + m_1)g^2/\omega_0^2$.

Введем параметр, характеризующий потерю скорости камеры при взаимодействии с загрузкой

$$\eta = \dot{y}_1(0)/\dot{y}_1(2\pi) \qquad (0 < \eta < 1)$$

Из последнего условия (5) следует, что при ударе загрузка сохраняет скорость, изменяя ее знак на противоположный. Одновременно, допущение абсолютно неупругого взаимодействия накладывает условие равенства скоростей загрузки и камеры сразу после удара. Окончательно, приближенное выражение для безразмерной энергии удара принимает вид

$$\Delta W = \frac{(1+\eta)^2\zeta^2\dot{y}_1^2(2\pi)}{2(\mu+1)P^2}$$

После подстановки сюда (16) получаем

$$\Delta W = \frac{2(1+\eta)^2\zeta^4 \operatorname{tg}^2 \pi\zeta}{(\mu+1)\pi^2(\zeta^2-1)^2}\sin^2\gamma. \qquad (18)$$

Работа внешней силы по гармонике первой частоты

$$A_P = \int_0^{2\pi} \sin(\tau+\varphi)\,\dot{y}_1(\tau)d\tau = \int_0^{2\pi} \sin(\tau+\varphi)\,a_1 \sin(\tau+\gamma)d\tau.$$

После преобразований получим

$$A_P = \frac{2\zeta P}{(\zeta^2 - 1)}\operatorname{tg}\pi\zeta\cos(\varphi - \gamma). \qquad (19)$$

Для определения уровня срезки зависимости (12) подставим (17), (18) и (19) в (15) при частотном параметре $\zeta = 1$, соответствующем резонансу. В этом случае сдвиг по фазе между перемещением и силой $\varphi = \pi/2$. Из (18) также следует, что $\gamma \le \pi/2$. После раскрытия неопределенностей получим выражение

$$2\pi\alpha P^2 - \pi P + \frac{(1+\eta)^2}{2(1+\mu)} \le 0.$$

Из двух корней уравнения один имеет физический смысл, который соответствует ординате уровня срезки. Через данную точку проводим линию, касательную к левой части кривой (12). Таким образом получаем верхнюю границу параметра возбуждения МВВ (рис. 2).

### *Литература*

1. Франчук В.П. Конструкция и динамический расчет вибрационных мельниц // Техника и технология обогащения руд. – М: Недра, 1975. – С. 143-160.

2. Пановко Я.Г. Построение приближенной амплитудной кривой для систем со слабым демпфированием // Вопросы динамики и прочности. – Рига, 1959. – Вып. 6. – С. 54-63.

3. Бабицкий В.И., Коловский М.З. Исследование колебаний линейной системы с ограничителями точными и приближенными методами // Машиноведение. – 1967. – № 4. – С. 14-20.