



Харченко С. А.

Гаек Е. А.

Харьковский  
национальный  
технический  
университет сельского  
хозяйства  
им. Петра Василенко

Kharchenko S. A.

Gaek E. A.

Kharkiv Petro Vasylenko  
National Technical  
University of Agriculture

УДК 621.928:33

## К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ЗАПЫЛЁННОМ ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

Предложена математическая модель расчета поля скоростей дисперсной фазы, получены осевые и тангенциальные зависимости скорости в запылённом воздушном потоке от диаметра частиц.

**Ключевые слова:** запылённый воздушный поток, дисперсная фаза, эффективность очистки, сепарирование.

**Постановка проблемы.** Процесс очистки запылённого воздушного потока относится к динамике многофазных сред [1-3]. Твердые частицы, увлекаемые потоком, не меняют свою форму, т.к. в процессе движения не происходит ни их дробление ни коагуляция. На них действуют силы аэродинамического сопротивления, архимедова сила, сила тяжести, сила, вызванная неравномерностью поля давления, а также центробежные силы. Однако сила тяжести, а тем более архимедова сила намного (на несколько порядков) меньше силы аэродинамического сопротивления. Сила, связанная с неравномерностью поля давления также мала. Есть еще силы взаимодействия между частицами, силы, возникающие при столкновениях частиц, электростатические силы. Но они крайне малы ввиду относительно малой концентрации частиц в потоке. Можно упомянуть также силу термофореза, но и она незначительна. В итоге, при рассмотрении процесса очистки можно ограничиться только учетом центробежной силы и силы аэродинамического сопротивления, причем, заметим, характер поверхности частиц мало влияет на эту силу [4].

**Цель работы:** построение модели движения дисперсной фазы в запылённом воздушном потоке и определить осевые и тангенциальные зависимости с учётом размера частиц пыли.

**Основной материал.** Если твердые частицы имеют близкие размеры, их движение может быть описано в рамках так называемой

“двухфазной модели”. Однако анализ дисперсного состава зерновой пыли показывает, что он характеризуется наличием нескольких фракций [5]. Следовательно, для описания понадобится “многофазная модель”.

Запишем силу, с которой поток воздуха действует на частицу. Ее составляющими являются силы Магнуса, присоединенных масс и сила Стокса, которая является основной [6-7].

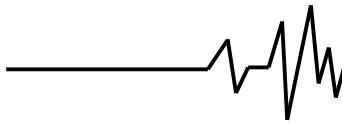
Сопротивление среды (сила Стокса) определяется формулой [8]

$$\overline{F}_s = \xi \frac{\pi r_s^2 \rho |\overline{U} - \overline{W}|}{2} (\overline{U} - \overline{W}), \quad (1)$$

где  $\xi = \xi(\text{Re}_s)$  – коэффициент гидравлического сопротивления,  $r_s$  – характерный эквивалентный радиус частицы,  $\overline{W}$  – ее скорость,  $\overline{U}$  – скорость потока воздуха,

$\text{Re}_s = \frac{2 r_s |\overline{U} - \overline{W}|}{\nu}$  – критерий Рейнольдса для частицы.

Эквивалентный радиус частицы вычисляется как радиус шара, объем которого равен объему реальной частицы, умноженному на фактор формы, который показывает, насколько реальная площадь поверхности частицы больше площади поверхности шара. При этом усредненный эквивалентный радиус частиц выделенной фракции следует вычислять как среднее гармоническое



эквивалентных радиусов входящих в фракцию частиц [9, 10].

При малых скоростях обтекания частицы потоком воздуха сопротивление среды обусловлено практически только силами трения, по мере увеличения скорости в сопротивлении начинают преобладать силы давления, вязкость среды играет все меньшую роль, главной становится ее плотность и скорость [11]. Т.е. коэффициент гидравлического сопротивления зависит от режима движения дисперсных частиц – если частицы обтекаются при малых числах Рейнольдса  $Re_s \leq 2$  (т.е. в ламинарном режиме), то коэффициент сопротивления  $\xi \approx \frac{24}{Re}$ , при  $2 < Re \leq 500$  (переходный режим) можно использовать Формулу Алена  $\xi \approx \frac{18,5}{Re^{0,6}}$ , а при  $Re > 500$  (турбулентный режим)  $\xi \approx 0,44$  [12, 13].

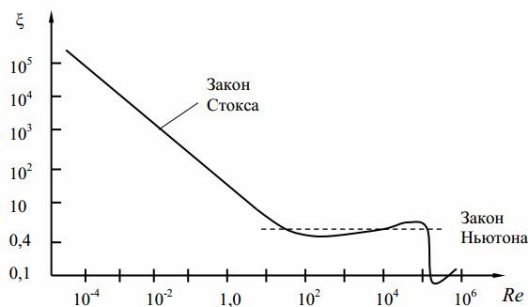


Рис. 1. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса

Заметим, что так как плотность частиц много больше плотности воздуха, то с достаточной точностью можно использовать формулу Стокса для расчета коэффициента сопротивления при  $Re_s \leq 10$ , а при больших значениях числа Рейнольдса – формулу Ньютона [14].

Для описания движения частиц обычно используют подход Лагранжа с имитационным моделированием движения отдельных частиц или подход Эйлера, при использовании которого дисперсная фаза описывается уравнениями сплошной среды.

Запишем уравнения движения для частиц выделенной фракции пренебрегая их взаимодействием друг с другом [15]:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} + (\bar{W}, \nabla)\bar{W} = \frac{\bar{F}}{m_s}, \quad (2)$$

где  $\bar{F}$  – сила, действующая на частицу (которая равна сумме центробежной силы и силы сопротивления среды),

$m_s = \frac{4\pi r_s^3 \rho_s}{3}$  – масса частицы,  $\rho_s$  – ее плотность,  $r_s$  – эквивалентный радиус.

Очевидно, можно полагать, что как осевая, так и тангенциальная составляющие скорости частиц практически совпадает с осевой и тангенциальной составляющими скорости воздушного потока [16].

В радиальном направлении на частицу кроме сил сопротивления действует только центробежная сила. Запишем уравнение для радиальной составляющей скорости частицы [16]:

$$\frac{dW_r}{dt} = -\xi \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_s r_s} W_r^2 + \frac{W_\varphi^2}{r}. \quad (3)$$

Откуда вытекает уравнение для радиальной координаты частицы:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\xi \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_s r_s} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r \cdot \Omega_0^2. \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть решено численными методами, например, методом Рунге-Кутты с коррекцией коэффициента сопротивления на каждом временном шаге. Однако на начальном участке движения, пока скорость частицы относительно потока невелика, она обтекается в ламинарном режиме и из уравнения (4) получим

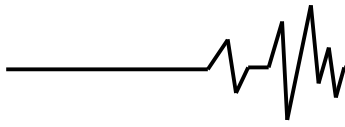
$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dr}{dt} - \Omega_0^2 = 0, \quad (5)$$

где  $\tau = \frac{2}{9} \frac{\rho_s r_s^2}{\rho \nu}$  – время релаксации (это время,

в течении которого частица, попавшая в поток, последует за потоком - сила инерции может быть приближенно определена как скорость относительного движения, умноженного на массу частицы и деленная на время релаксации, приравняв эту силу к силе сопротивления, действующей на частицу со стороны потока получим выражение для времени релаксации).

Решение уравнения (5) имеет вид:

$$r = \frac{r_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) e^{(\beta-1)\frac{t}{2\tau}} + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) e^{-(\beta-1)\frac{t}{2\tau}} \right\}, \beta = \sqrt{1 + 4\tau^2 \Omega_0^2} \quad (6)$$



где  $r_0$  – радиус, на котором находится частица в начальный момент времени. При этом скорость частицы будет:

$$W_r = \frac{r_0 \beta - 1}{2 \beta} \left\{ e^{(\beta-1)\frac{t}{2\tau}} - e^{-(\beta-1)\frac{t}{2\tau}} \right\}. \quad (7)$$

Если пренебречь разгонным участком траектории, то из уравнения (5) получим уравнение:

$$\frac{1}{\tau} \frac{dr}{dt} - \Omega_0^2 r = 0, \quad (8)$$

его решение [18] определится формулой:

$$r = r_0 e^{\tau \Omega_0^2 t}, \quad (9)$$

а радиальная скорость движения частицы:

$$W_r(r) = r \cdot \tau \cdot \Omega_0^2. \quad (10)$$

Очевидно, погрешность приближенных формул (9), (10) мала для малых частиц и возрастает для более крупных частиц, так как для них разгонный участок траектории увеличивается.

Используя выражение (10) для скорости движения нетрудно оценить и характерные размеры частиц, которые заведомо обтекаются в ламинарном режиме:

$$r_s < \left( 9 Re_s \frac{\rho}{\rho_s} \frac{v^2}{\Omega_0^2 D_0} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (11)$$

где  $Re_s$  – критическое значение числа Рейнольдса, отвечающее переходу к турбулентному обтеканию. Учитывая тот факт, что плотность частиц значительно превосходит плотность воздуха из (11) следует, что с достаточной для практики точностью можно считать, что в ламинарном режиме обтекаются частицы с характерными диаметрами до  $d_s < 50 \text{ мкм}$ .

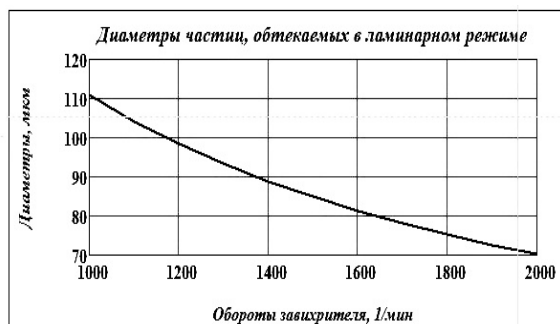


Рис. 2. Максимальные диаметры частиц, обтекаемых в ламинарном режиме

Такой интервал дисперсности наблюдается, например, для мучной пыли - это тонкая летучая фракция, образующаяся в результате помола муки. Для зерновой же пыли характерен значительный интервал дисперсности частиц -  $1 \div 1000 \text{ мкм}$ , поэтому в такой пыли будут частицы, которые могут обтекаться в переходном и турбулентном режимах, но число таких частиц невелико, поэтому для расчетов можно пользоваться формулой (6).

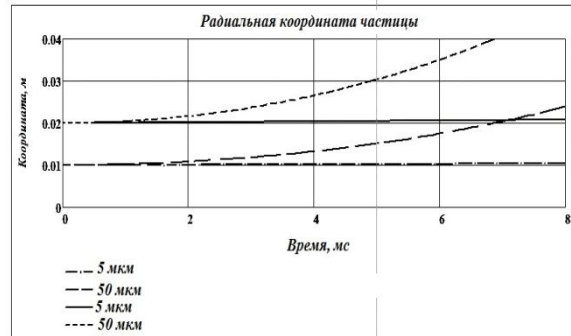


Рис. 3. Изменение радиальной координаты частицы

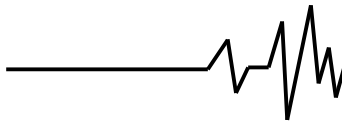
Учет влияния турбулентных пульсаций, оказывающих некоторое влияние на движение самых мелких частиц, может быть проведен на основании уравнения [17]

$$\frac{1}{\tau} \frac{dr}{dt} - \Omega_0^2 r + \frac{C(t)}{m_s} = 0 \quad (12)$$

где  $C(t)$  – коэффициент случайного воздействия, который является дельтакоррелированной функцией времени с нулевым средним значением. Однако оценки показывают, что турбулентные пульсации влияют только на движение наиболее мелких частиц [17]  $d_s < 5 \text{ мкм}$ , для отделения которых предназначен доочиститель.



Рис. 4. Радиальная скорость для частиц (диаметр 50 мкм)



На рис. 3, 4 показаны типичные результаты расчета радиальной координаты и скорости частицы, а на рис.5 показаны результаты расчета числа Рейнольдса для частиц разных размеров. Видно, что мелкие частицы практически не успевают отклониться к стенке камеры, в то время как более крупные отклоняются значительно и часть из них попадает на жалюзи пылеотделителя и далее в пылеосадочную камеру.

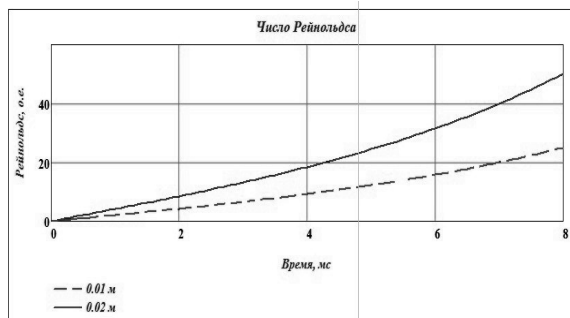


Рис. 5. Изменение числа Рейнольдса для частиц (диаметр 200мкм) вдоль траектории

При этом даже крупные частицы не успевают при движении разогнаться до скоростей, при которых турбулентный характер обтекания становится существенным. Т.е. вплоть до зоны доочистителя расчеты можно проводить используя формулу Стокса практически для частиц любых размеров.

После того, как частицы достигнут зоны доочистителя, на них начинает действовать увлекающая сила воздушного потока, направленная радиально к оси и продолжает действовать радиально направленная от оси центробежная сила. Запишем уравнение для радиальной составляющей скорости частицы [18]

$$\frac{dW_r}{dr} = -\xi \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_s r_s} (W_r - U_r)^2 + \frac{W_\varphi^2}{r} \quad (13)$$

где  $U_r = \frac{D_0^2 U_0}{8r l_0}$  – скорость потока, а  $l_0$  – ширина доочистителя.

Отсюда вытекает уравнение для радиальной координаты частицы

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\xi \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_s r_s} \left( \frac{dr}{dt} - U_r \right)^2 + r \cdot \Omega_0^2 \quad (14)$$

Для мелких частиц, обтекаемых в ламинарном режиме уравнение (14) запишется в виде

$$\frac{dr}{dt} = \tau \Omega_0^2 r - \frac{D_0^2 U_0}{8r l_0} \quad (15)$$

Отсюда следует, что если частица попала в зону доочистителя на радиусе, удовлетворяющем неравенству

$$r > \frac{D_0}{\Omega_0} \sqrt{\frac{U_0}{8l_0 \tau}}, \quad (16)$$

то она за счет центробежных сил будет отброшена к стенкам камеры и попадет в пылесборник. Те частицы, которые будут находиться ближе к центру камеры, могут быть втянуты в доочиститель и их дальнейшее поведение будет определяться параметрами доочистителя. При этом, очевидно, более крупные частицы, обтекаемые в турбулентном режиме, при выполнении неравенства (16) также за счет центробежных сил будут отброшены к стенкам камеры и попадут в пылесборник.

Ясно, что только частицы, радиус входа которых

$$r_0 > \frac{\frac{D_0}{\Omega_0} \sqrt{\frac{U_0}{8l_0 \tau}}}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) e^{(\beta-1) \frac{L_0}{2\tau U_0}} + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) e^{-(\beta-1) \frac{L_0}{2\tau U_0}}}, \quad (17)$$

при входе в зону доочистителя достигнут радиуса, удовлетворяющего неравенству (16). Т.е., если считать, что частицы равномерно распределены на входе по сечению потока, эффективность отделения дисперсных частиц в процессе предварительной очистки будет определяться формулой

$$\eta = 1 - \frac{2 \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{U_0}{l_0 \tau}}{\left[ \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) e^{(\beta-1) \frac{L_0}{2\tau U_0}} + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) e^{-(\beta-1) \frac{L_0}{2\tau U_0}} \right]^2}, \quad (18)$$

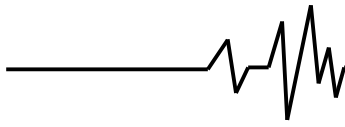
а концентрация частиц по длине камеры

$$n^{(x)} = n_0 \frac{2 \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{U_0}{l_0 \tau}}{\left[ \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) e^{(\beta-1) \frac{L_0}{2\tau U_0}} + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) e^{-(\beta-1) \frac{L_0}{2\tau U_0}} \right]^2} \quad (19)$$

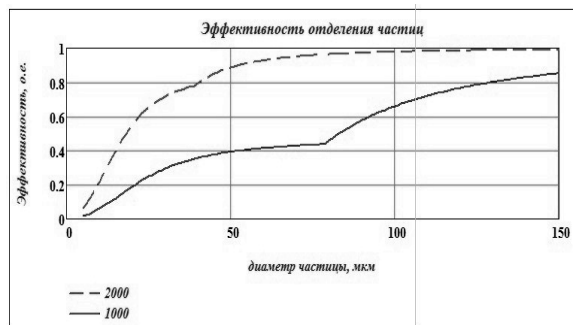
где  $n_0$  – начальная концентрация частиц.

На рис. 6 показано изменение коэффициента эффективности отделения частиц разных размеров в зависимости от скорости вращения вентилятора-завихрителя.

Частицы, диаметры которых лежат до характерного излома на графике, частично отделяются в процессе их движения к



доочистителю, но дальше потоком воздуха они втягиваются между пластинами доочистителя. Частицы с большим диаметром также частично отделяются в процессе их движения к доочистителю, затем часть таких частиц отделяется при их вращении в зоне доочистителя, а часть втягивается между пластинами доочистителя.



**Рис. 6. Отделение частиц при разной скорости вращения вентилятора-завихрителя**

### Выводы

Таким образом из предложенных алгоритм расчета осевой и тангенциальной скоростей следует, что частицы с большим диаметром движутся в воздухоочистителе вначале в ламинарном режиме, а по мере разгона могут перейти в турбулентный режим обтекания. Однако оценки показывают, что для рассматриваемого воздухоочистителя практически частицы любого диаметра не успевают достаточно разогнаться и движутся в режиме близком к ламинарному.

Осевая и тангенциальная скорости частиц, практически совпадают с соответствующими скоростями воздушного потока.

При этом мелкая фракция (диаметры частиц до 10 мкм) почти не удаляется, а эффективность удаления крупной фракции (более 10 мкм) достигает 93%.

### Список использованных источников

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред. – М. : Наука, 1976. – т. 1 – 536 с.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
3. Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А., Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. – М. : Колос, 1980. – 304 с.

4. Степанов Г.Ю., Зицер И.М. Инерционные воздухоочистители. – М. : Машиностроение, 1986. – 184 с.

5. Донин Л.С. Справочник по вентиляции в пищевой промышленности. – М. : Пищевая промышленность, 1997. – 352 с.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. 3-е изд., испр. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 736 с.

7. Clift R., Gauvin W.H. Motion of entrained particles in gas streams. *Canad. J. Chem. Eng.*, 1971, v. 49, 4, p. 439–448.

8. Разумов И.М. Псевдооживление и пневмотранспорт сыпучих материалов, М. : "Химия", 1972, 122 с.

9. И. П. Мухленова, Б. С. Сажина, В. Ф. Фролова Расчеты аппаратов кипящего слоя: справ. – Л. : Химия, 1986. – 352 с.

10. Тодес О.М., Цитович О.Б. Аппараты с кипящим зернистым слоем. Л. : Химия, 1981. – с. 23.

11. Разумов И.М. Псевдооживление и пневмотранспорт сыпучих материалов, М. : "Химия", 1972, – 122 с.

12. Медников Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М. : Наука, 1981. – 175 с.

13. Эмирджанов Р.Т. Основы технологических расчетов в нефтепереработке. – Л. : Химия, 1965. – 544 с.

14. Медников Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. – М. : Энергия, 1980. – 176 с.

15. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М. : Наука, 1978. – 336 с.

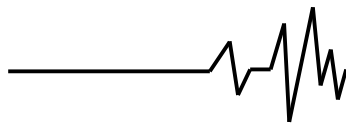
16. Сугак Е.В. разработка и исследование конденсационного центробежного сепаратора. Дисс. канд. техн. наук. – Л., 1982. – 147 с.

17. Старк С.Б. Газоочисные аппараты и установки в металлургическом производстве. – М. : Металлургия, – 400 с.

18. Кутепов, А.М. Вихревые процессы для модификации дисперсных систем / А.М. Кутепов, А.С. Латкин. – М. : Наука, 1999. – 272 с.

### Список источников в транслитерации

1. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnykh sred.* – М. : Nauka, 1976. – Т. 1 – 536 s.
2. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred.* – М. : Nauka, 1978. – 336 s.
3. Gortinskiy V.V., Demskiy A.B., Boriskin M.A., *Protsessy separirovaniye na zernopererabatyvayushchikh predpriyatiyakh.* – М. : Kolos, 1980. – 304 s.



4. Stepanov G.Y., Zitser I.M. Inertsionnyye vozdukhochistiteli. – M.: Mashinostroyeniye, 1986. – 184 s.

5. Do L.S. Spravochnik po ventilyatsii v pishchevoy promyshlennosti. – M.: Pishchevaya promyshlennost, 1997. – 352 s.

6. Landau L.D., Lifshits Y.M. Teoreticheskaya fizika. Gidrodinamika. 3-ye izd., Ispr. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. – 736 s.

7. Clift R., Gauvin W.H. Motion of entrained particles in gas streams. Canad. J. Chem. Eng., 1971, v. 49, 4, p. 439–448.

8. Razumov I.M. Psevdozhizheniya i pnevмотransport sypuchikh materialov, M.: "Khimiya", 1972, 122 s.

9. P. Mukhlenova, B. S. Sazhina, V. F. Frolova Raschety apparatov kipyashchego sloya: del. – L.: Khimiya, 1986. – 352 s.

10. Todes O.M., Tsitovich O.B. Apparaty s Kipyashchiy zernistoy sloyem. L.: Khimiya, 1981. – S. 23.

11. Razumov I.M. Psevdozhizheniya i pnevмотransport sypuchikh materialov, M.: "Khimiya", 1972, – 122 s.

12. Mednikov Y.P. Turbulentnyy perenos i osazhdeniye aerorozley. M.: Nauka, 1981. – 175 s.

13. Emirdzhanov R.T. Osnovy tekhnologicheskikh raschetov v neftepererabotke. – L.: Khimiya, 1965. – 544 s.

14. Mednikov Ye.P. Turbulentnyy perenos i osazhdeniya aerorozley. – M.: Energiya, 1980. – 176 s.

15. Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred. – M.: Nauka, 1978. – 336 s.

16. Sugak Y.V. razrabotka i issledovaniye kondensatsionnogo tsentrobeznyye separatora. Diss. kand. tekhn. nauk. – L., 1982. – 147 s.

17. Stark S.B. Gazoobraznyye apparaty i ustanovki v metallurgicheskikh proizvodstve. – M.: Metallurgiya, – 400 s.

18. Kutepov, A.M. Vikhrevyye protsessy dlya modifikatsii dispersnykh sistem / A.M. Kutepov, A.S. Latkin. – M.: Nauka, 1999. – 272 s.

#### ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОЛЯ ШВИДКОСТЕЙ ДИСПЕРСНОЇ ФАЗИ В ЗАПИЛЕНОМУ ПОВІТРЯНОМУ ПОТОЦІ

**Анотація.** Запропоновано математична модель розрахунку поля швидкостей дисперсної фази, отримані осьові і тангенціальні залежності швидкості в запиленому повітряному потоці від діаметра частинок.

**Ключові слова:** запилений повітряний потік, дисперсна фаза, ефективність очищення, сепарування.

#### BY BUILDING A MATHEMATICAL MODEL OF THE VELOCITY FIELD OF THE DISPERSED PHASE IN THE DUSTY AIR STREAM

**Annotation.** The mathematical model for calculating the field of velocities of the dispersed phase, obtained axial and tangential velocity, depending dusty air stream from the diameter of the particles.

**Key words:** dust air stream, the dispersed phase, the cleaning efficiency, separation.