

Улітін Г. М.

Царенко С. М.

*ДВНЗ “Донецький
національний технічний
університет”*

Ulitin G. M.

Tsarenko S. M.

*Donetsk National
Technical University*

УДК 539.4

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В БОЙКАХ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ФОРМИ В МЕХАНІЗМАХ УДАРНОЇ ДІЇ

В статті досліджуються динамічні процеси, що виникають в стрижні гіперболічної форми, який моделює роботу бойка імпульсних систем силової дії. В якості розрахункової моделі розглянута задача про повздовжній удар стрижня змінного перерізу об жорстку перешкоду. Для дослідження ударного процесу використана хвильова модель Сен-Венана, а її розв'язання зроблено за методом Фур'є. Для розв'язання крайової задачі визначені власні функції з урахуванням їх властивостей. Проаналізовано вплив геометричних параметрів стрижня на значення першої власної частоти, на основі чого запропонована апроксимуюча формула для наближених розрахунків. Отримані залежності для визначення переміщень і напружень перерізів стрижня. Побудовано графік для визначення максимального зусилля в ударному торці та зроблено порівняльний аналіз з бойком конічної форми.

Ключові слова: ударний механізм, повздовжній удар, метод Фур'є, стрижень змінного перерізу, повздовжні коливання, власні коливання.

Постановка проблеми. Силові імпульсні системи широко використовуються в машинах, що виконують різноманітні технологічні процеси: штампування, кування, руйнування гірських порід, бетонних покриттів, занурення паль і так далі. Проблема підвищення продуктивності машин ударної дії розв'язується не тільки за рахунок збільшення потужності, а також за рахунок підвищення ефективності передачі енергії в середовище, що обробляється. Останнє досягається, в тому числі, за рахунок вивчення процесу формування хвиль деформації бойками різної геометрії та пошуку конструкцій бойків, які забезпечують раціональні технологічні параметри [1].

При розгляданні різних моделей повздовжнього співударяння тіл [1, 2] за основу приймається хвильова модель удару Сен-Венана, так як вона найбільш повно відображає реальні динамічні процеси в тілах, що співударяються, а для її практичної реалізації використовують метод Даламбера. Точне розв'язання хвильової моделі дає метод Фур'є [3]. Деякі окремі випадки повздовжнього удару з використанням цього методу для стрижнів сталого перерізу розглянуті в роботах [4, 5]. У

роботах [2, 6-8] розглянуто моделі повздовжнього удару стрижнів різної конфігурації з використанням апроксимації їх поверхні послідовно сполученими циліндричними ділянками.

Метою дослідження є:

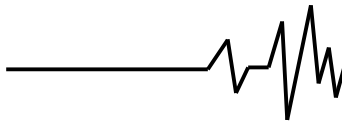
- отримання розрахункових залежностей для дослідження напружено-деформованого стану стрижня змінного перерізу, що виникає під час удару;

- дослідження впливу геометричних параметрів стрижня на параметри коливального процесу;

- визначення ефективних геометричних параметрів ударного інструменту.

Основні результати дослідження. В якості математичної моделі об'єкта, що розглядається, візьмемо пружний стрижень гіперболічної форми довжиною l (рис. 1). Діаметр зовнішнього контуру у довільному перерізі такого стрижня визначається за залежністю [2]

$$d(x) = \frac{d_0}{k - \frac{x}{l}(k-1)},$$



де $k = d_0 / D_0$, D_0 , d_0 – відповідно діаметри великого та малого торців.

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{z^3} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tilde{\gamma}}{z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ де } \tilde{\gamma} = \frac{\gamma l^2}{E(k-1)^2}. \quad (5)$$

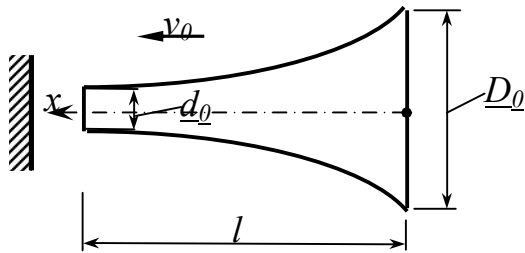


Рис. 1. Схема удару гіперболічного стрижня об жорстку перешкоду

Для дослідження повздовжніх коливань $u(x, t)$ потрібно розв'язати задачу [9]

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \gamma F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$u(l, t) = 0; \quad (2)$$

$$u'_x(0, t) = 0. \quad (3)$$

З початковими умовами

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = v_0 e(x), \quad (4)$$

де E – модуль пружності, $F(x)$ – площа поперечного перерізу стрижня, γ – густина матеріалу, v_0 – швидкість удару, $e(x)$ – одинична функція.

Для перерізу стрижня в нашому випадку

$$F(x) = \frac{\pi d_0^2}{4 \left(k - \frac{x}{l} (k-1) \right)^2}.$$

Розглянемо випадок вільних коливань і для рівняння (1) використаємо заміну

$$z = k - \frac{x}{l} (k-1) \quad (k \leq z \leq 1).$$

Тоді воно прийме вигляд

$$Z_n(z) = \sin \lambda_n z - \lambda_n z \cos \lambda_n z - \tan \lambda_n k (\cos \lambda_n z + \lambda_n z \sin \lambda_n z) = \frac{\sin \lambda_n (z-k) - \lambda_n z \cos \lambda_n (z-k)}{\cos \lambda_n k}. \quad (10)$$

Розглянемо вплив параметра k на значення першого власного числа частотного рівняння (9). Якщо ввести позначення

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{1-k} \text{ тоді перша власна частота буде}$$

З першої початкової умови (4) одержимо

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \sin \omega_n t, \quad (6)$$

де $u(z, t)$ – переміщення, викликані за рахунок початкової швидкості v_0 , A_n – довільні сталі, $Z_n(z)$ – власні функції відповідних крайових задач, ω_n – частоти власних коливань.

Диференціальний оператор рівняння (1) є самоспряженим, отже, функції $Z_n(z)$ будуть ортогональні з вагою $\rho(z) = 1/z^2$ на відрізку $[z_1; z_2]$ [9], де $z_1 = k$; $z_2 = 1$.

Для визначення власних функцій задачі (5) отримуємо рівняння

$$z Z_n'' - 2 Z_n' + \lambda_n^2 z Z_n = 0, \quad (7)$$

де $\lambda_n = \omega_n \sqrt{\tilde{\gamma}}$ – власні значення.

Загальний розв'язок рівняння (7) знаходиться в функціях Бесселя з полу цілим індексом [10], які можна представити через тригонометричні залежності [11]

$$Z_n(z) = C_1 (\sin \lambda_n z - \lambda_n z \cos \lambda_n z) + C_2 (\cos \lambda_n z + \lambda_n z \sin \lambda_n z). \quad (8)$$

Якщо задовольнити крайовим умовам (2) і (3), то з урахуванням виразу для власних функцій (8) отримаємо рівняння для знаходження власних значень

$$\tan \lambda_n (1-k) = \lambda_n. \quad (9)$$

Тоді власні функції можна представити у вигляді

$$\text{визначатися залежністю } \omega_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\tilde{\gamma}}} = \frac{\tilde{\lambda}_1}{l} \sqrt{\frac{E}{\gamma}},$$

яка аналогічна рівнянню для стрижнів сталого перерізу [5].

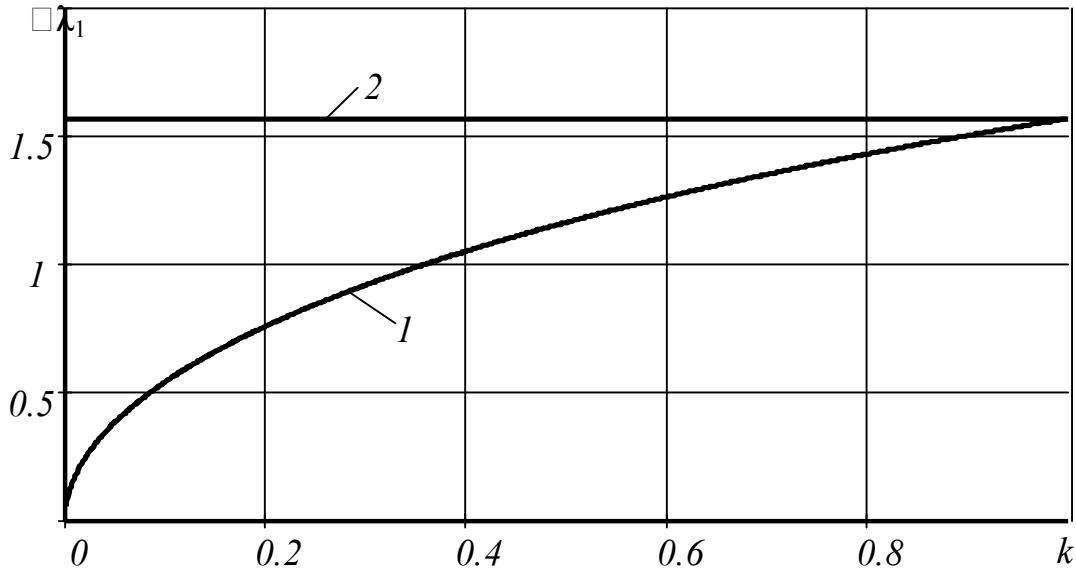
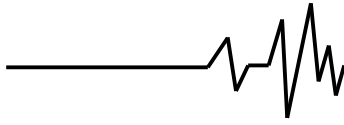


Рис. 2. Залежність λ_1^2 від значення параметра відносного поперечного розміру k : 1 - для стрижня змінного перерізу; 2 – для стрижня сталого перерізу ($\lambda_1 = 1,571$)

На графіку рис. 2 показана залежність $\tilde{\lambda}_1$ від величини параметра відносного поперечного розміру k , на графіку бачимо, що при значеннях $k \rightarrow 1$, значення першої власної частоти співпадає з частотою, отриманою для моделі стрижня сталого перерізу $\lambda_1 = \pi/2 = 1,571$ [3]. Для наближених методів розрахунку на повздовжні коливання криву 1 можна апроксимувати, з достатньою для технічних розрахунків точністю, залежністю

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\pi}{2} k^{0,45},$$

значення коефіцієнта в ступені аргументу знайдено за допомогою вбудованої процедури програмного середовища MathCAD.

Для спрощення визначення квадрата норми власних функцій перейдемо до границі при $m \rightarrow n$ у виразі від добутку власних функцій з різними індексами

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} Z_m Z_n dz = \frac{1}{z^2} (Z_n Z'_m - Z_m Z'_n) \Big|_{z_1}^{z_2},$$

в результаті чого одержуємо

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} Z_n^2(z) dz = \frac{1}{2\lambda_n z^2} \left(Z'_n \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} - Z_n \frac{\partial Z'_n}{\partial \lambda_n} \right) \Big|_{z_1}^{z_2}. \quad (11)$$

Тоді з співвідношення (11) квадрат норми власних функцій з урахуванням ваги буде визначатися за формулою

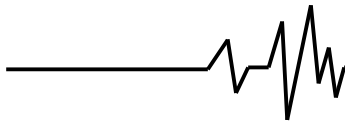
$$\Delta_n^2 = \frac{\lambda_n^2 (\sin^2 \lambda_n (1-k) - k)}{2 \cos^2 \lambda_n k}. \quad (12)$$

Якщо задовольнити другій початковій умові (4), то у виразі (6) коефіцієнти A_n приймуть вигляд

$$A_n = \frac{v_0 \sqrt{\tilde{\gamma}}}{\Delta_n^2 \lambda_n} \int \frac{1}{k z^2} Z_n dz = - \frac{v_0 \sqrt{\tilde{\gamma}} \cos \lambda_n (1-k)}{\Delta_n^2 \cos \lambda_n k}. \quad (13)$$

Розв'язання (6) при значеннях коефіцієнтів (13) визначає пружні переміщення конструкції

$$u(z,t) = - \frac{v_0 l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \lambda_n (1-k)}{\lambda_n^2 (\sin^2 \lambda_n (1-k) - k)} (\sin \lambda_n (z-k) - \lambda_n z \cos \lambda_n (z-k)) \sin \omega_n t, \quad (14)$$



де $c = \sqrt{\frac{E}{\gamma}}$ - швидкість хвилі повздовжніх коливань стрижня. Тоді напруження будуть визначатися залежністю

$$\sigma(z, t) = -E \frac{v_0(1-k)}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \lambda_n(1-k)}{\sin^2 \lambda_n(1-k) - k} z \sin \lambda_n(z-k) \sin \omega_n t. \quad (15)$$

А вираз для зусилля в ударному перерізі одержимо з рівняння (15) у вигляді

$$P(t) = -EF_0 \frac{v_0(1-k)}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\lambda_n(1-k)}{\sin^2 \lambda_n(1-k) - k} \sin \omega_n t, \text{ де } F_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}. \quad (16)$$

Оцінимо ефективність гіперболічного профілю відносно конічного, порівнявши зусилля в ударному торці для стрижнів з однаковими габаритами, тобто однаковими довжиною та параметром співвідношення торців k . Для прикладу, візьмемо параметри конічних стрижнів для яких в роботі [8] проведені численні розрахунки. В якості базової моделі був прийнято стрижень з кутом нахилу конуса $\alpha = 0^\circ$, довжиною $l=1$ м та діаметром ударного торцю $d_0 = 0,025$ м, інші стрижні мали еквівалентну вагу та кути нахилу відповідно $0,5^\circ$; 1° ; 3° ; 6° та 9° . Для визначення параметра k складемо залежності для ваги стрижня M та кута нахилу конуса:

$$M = F_0 \gamma l_\alpha \frac{k^2 + k + 1}{3k^2} = F_0 \gamma l; \tan \alpha = d_0 \frac{1-k}{2kl_\alpha},$$

де l_α - довжина конічного стрижня, звідси знайдемо формулу для знаходження k

$$k = 3 \sqrt{\frac{d_0}{6l \tan \alpha + d_0}}.$$

Таким чином, знайдемо для конусного стрижня з кутом нахилу $\alpha = 6^\circ$ $k = 0.337$. На рис. 3 представлений графік відносної величини зусилля в ударному перерізі

$$\tilde{P} = -\frac{P}{EF_0} \frac{c}{v_0}$$

$$\tau = \frac{c}{l} t.$$

з графіку знаходимо максимальне значення відносного зусилля $\tilde{P} = 3,9$, для конічного стрижня це значення становить 4,88 [8], тобто на 25% більше, але слід зауважити що вага гіперболічного бойка буде на 43% менше ніж конічного, що відповідно призведе до суттєвої економії енерговитрат.

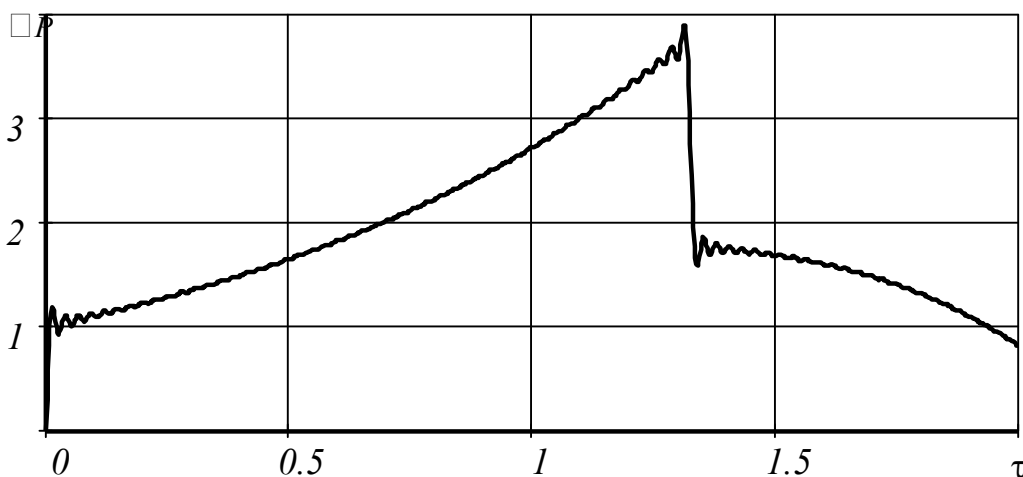
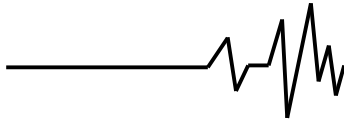


Рис. 3. Графік зміни величини відносного зусилля \tilde{P}

**Висновок**

1. У статті розглянута задача про повздовжній удар гіперболічного стрижня змінного перерізу, що моделює роботу бойка силової імпульсної системи. Задача розв'язана з використанням методу Фур'є, що дало змогу отримати аналітичні залежності для визначення шуканих величин.

2. На підставі аналізу впливу геометричних параметрів стрижня на значення першої власної частоти запропонована апроксимуюча формула для використання в наближених методах розрахунків.

3. Шляхом профілювання геометричної форми бойків можна перерозподілити параметри імпульсу, тобто збільшити навантаження за рахунок скорочення часу дії, а також можна забезпечити необхідні технологічні параметри процесу збурювання ударних хвиль при значному зменшенню енерговитрат.

Список використаних джерел

1. Алимов О.Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах [Текст] / О.Д. Алимов, В.К. Манжосов, В.Э. Еремьянц. – М.: Наука, 1985. – 357 с.
2. Манжосов В.К. Модели продольного удара [Текст] / В.К. Манжосов. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 160 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания [Текст]: Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: «Машиностроение», 1968. – 567 с.
4. Абрамов Б.М. Применение метода рядов для исследования продольного удара стержней [Текст] / Б.М. Абрамов, А.Б. Абрамов // В кн.: Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища шк., 1972. – С. 47-58.
5. Шевченко Ф.Л. Задачі з опору матеріалів [Текст]: Навчальний посібник./ Ф.Л. Шевченко, С.М. Царенко. – Донецьк: РІА ДонНТУ, 2011. – 356 с.
6. Алимов О.Д. Бурильные машины [Текст] / О.Д. Алимов, Л.Т. Дворников. – М.: Машиностроение, 1976. – 295 с.
7. Дворников Л.Т. Формирование ударного импульса в полубесконечном стержне бойком, имеющим форму гиперболоида вращения [Текст] / Л.Т. Дворников, А.А. Мясников // труды ФПИ. – 1977. – вып. 104. – С. 70-82.
8. Манжосов В.К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры [Текст] / В.К.

Манжосов, В.В. Слепухин. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.

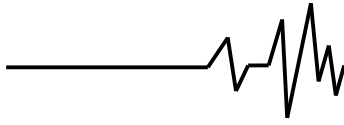
9. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции [Текст] / В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке - М.: Наука, 1976. – 576 с.

11. Ватсон Г.И. Теория бесселевых функций [Текст] / Г.И. Ватсон – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 798 с.

Список джерел в транслітерації

1. Alimov O. Impact. The wave distribution in impact deformation systems [Text] / O. Alimov, V. Manzhosov, V. Eremyants. – Moscow: Nauka, 1985. – 357 p.
2. Manzhosov V. Models longitudinal impact [Text] / V. Manzhosov – Ulyanovsk: UISTU 2006. – 160 p.
3. Strength, stability, oscillations [Text]: Directory in three volumes. Volume 3. Ed. I. Birger and Ya. Panovko. – Moscow: "Mashinostroyeniye", 1968. – 567 p.
4. Abramov B. Application of the series for the longitudinal impact studies rods [Text] / B. Abramov, A. Abramov // In.: Teoriya mekhanizmov i mashin. – Kharkov: Vishcha Shkola., 1972. – 47-58.
5. Shevchenko F. Problems of Strength of Materials [Text] / F. Shevchenko, S. Tsarenko. – Donetsk: RIA Donetsk National Technical University, 2011. – 356 p.
6. Alimov O. Drilling machines [Text] / O. Alimov, L. Dvornikov. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1976. – 295 p.
7. Dvornikov L. Formation of the shock pulse in half infinite rod striker of a hyperboloid forms [Text] / L. Dvornikov, A. Butchers // FPI works. – 1977. – Vol. 104. – 70-82.
8. Manzhosov V. Modeling longitudinal impact rod systems of the inhomogeneous structure [Text] / V. Manzhosov, V. Slepuhin – Ulyanovsk: UISTU 2011. – 208 p.
9. Arsenin V. Methods of mathematical physics and special functions [Text] / V. Arsenin. – Moscow: Nauka, 1974. – 432 p.
10. E. Kamke, Handbook of Ordinary Differential Equations [Text] / E. Kamke, Nauka, 1976. – 576.
11. Watson GI Theory of Bessel functions [Text] / GI Watson – Moscow: Izd. of literature, 1949. – 798 p.



**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ В БОЙКАХ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В
МЕХАНИЗМАХ УДАРНОГО ДЕЙСТВИЯ**

Аннотация. В статье исследуются динамические процессы, возникающие в стержне гиперболической формы, который моделирует роботу бойка импульсных систем силового действия. В качестве расчетной модели рассмотрена задача о продольном ударе стержня переменного сечения об жесткий ограничитель. Для исследования ударного процесса использована волновая модель Сен-Венана, а ее решение получено методом Фурье. Для решения граничной задачи определены собственные функции с учетом их свойств. Проанализировано влияние геометрических параметров стержня на значение первой собственной частоты, на основании чего предложена аппроксимирующая зависимость для приближенных расчетов. Получены зависимости для нахождения напряжений и перемещений сечений стержня. Построен график для нахождения усилий в ударном торце и сделан сравнительный анализ с бойком конической формы.

Ключевые слова: ударный механизм, продольный удар, метод Фурье, стержень

переменного сечения, продольные колебания, собственные колебания.

**MODELING OF DYNAMIC PROCESSES IN THE
RODS HYPERBOLIC SHAPE IMPACT
MECHANISMS**

Annotation. It studies dynamical processes occurring in the rod of a hyperbolic shape that emulate the operation of power systems of the striker pulse action. Consider the problem of longitudinal impact rod of variable cross-section of the hard restrictor as a calculation model. To study the impact used by wave model of Saint-Venant, and its solution is obtained by the Fourier method. It solve the boundary value problem defined by eigenfunction given their properties. It analyzed the influence of the geometric parameters of the rod to the value of the fundamental frequency, which is offered on the basis of the approximating formula for the approximate calculations. It is given dependencies to find the stresses and displacements of the rod sections. It constructs the graph to find strength in the impact section and made a comparative analysis with striker conical shape.

Key words: impact mechanism, longitudinal impact, Fourier method, rod of variable cross section, longitudinal oscillations, natural oscillations.