

Горошко А. В.

Хмельницький  
національний  
університет

Goroshko A. V.

Khmelnyskyi National  
University

УДК 621.002

**СТІЙКІСТЬ АЛГОРИТМІВ  
ІДЕНТИФІКАЦІЇ ГНУЧКИХ  
РОТОРІВ**

Показана актуальність досліджень стійкості алгоритмів ідентифікації роторів, що швидко обертаються, з метою одержання стійких і точних результатів. Розкрито фізичний зміст чисел обумовленості системи лінійних алгебраїчних рівнянь в задачі ідентифікації ексцентриситетів з використанням статичних коефіцієнтів впливу. Число обумовленості матриці оцінюється знизу відношенням квадратів максимальної і мінімальної власних частот обертання даної дискретної моделі ротора. Встановлені ділянки частот, що відповідають найбільш стійким розв'язкам задачі при балансуванні ротора як гнучкого. Найменш стійкими ділянками частот обертання при балансуванні є області поблизу критичних частот. Встановлено, що алгоритм ідентифікації, а з ним і метод балансування тим більше стійкі, чим більше гнучкість ротора. Врахування гіроскопії збільшує число обумовленості матриці і похибку ідентифікації ексцентриситетів, і цю обставину необхідно мати на увазі при виборі динамічної моделі.

**Ключові слова:** стійкість, ідентифікація, ротор, ексцентриситет, число обумовленості.

**Постановка проблеми.** Параметрична ідентифікація гнучкого ротора являє собою розв'язання оберненої задачі теорії коливальних, коли за рухом динамічної системи, що спостерігається і фіксується, необхідно відновити сили, які викликають цей рух.

В зв'язку з цим виникає питання про ідентифікованість динамічної системи, тобто про принципову можливість однозначного визначення векторів невідомих величин, а далі – про надійність ідентифікації, тобто про можливі помилки у визначенні цих величин через те, що часто об'єктивна властивість ідентифікованості не розкривається до кінця внаслідок недосконалості конкретних алгоритмів ідентифікації, що використовуються.

Розглянемо питання стійкості балансування в смислі коректності вибраного алгоритму ідентифікації або прийнятої динамічної моделі ротора, розуміючи під цим той факт, що малі зміни вхідних, отриманих експериментальним шляхом, параметрів, викликають незначні зміни значень дисбалансів або коректуючих мас, що ідентифікуються. Більш строго таке поняття стійкості можна визначити наступним чином. Нехай вхідні параметри  $a_1, a_2, \dots, a_n$  зв'язуються з

шуканими  $x_1, x_2, \dots, x_k$  скалярним або векторним рівнянням виду

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_k) = 0.$$

Кажуть, що вибрана модель стійка, якщо для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\delta > 0$ , що як тільки  $\|\mathbf{A}\| < \delta$ , то  $\|\mathbf{X}\| < \varepsilon$ , де  $\mathbf{X}$  – вектор з координатами  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $\mathbf{A}$  – вектор з координатами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , знак  $\|\cdot\|$  означає деяку норму вектора. Аналогічно визначається стійкість не по всім вхідним параметрам, а по одному з них або деякій їх групі, розуміючи під  $\mathbf{A}$  вектор, в якому всі координати, за винятком вибраних, є постійними величинами.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Через те, що в більшості відомих методах ідентифікації [1-3], необхідно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), актуальною проблемою є одержання максимально стійких і точних ідентифікованих даних, оскільки внаслідок некоректності постановки оберненої задачі і, зокрема, поганої обумовленості СЛАР, можна отримати хибні результати.



**Виділення невіршених раніше частин загальної проблеми.** Розглянемо стійкість і точність ідентифікації ексцентриситетів гнучкого ротора при використанні статичних коефіцієнтів впливу, оскільки тут чіткіше проявляється фізична суть явища.

**Основні результати дослідження.** В роботах [4, 5] показано, що рух гнучкого ротора відносно системи координат, яка обертається разом з ним, одна із осей якої співпадає з віссю ротора, описується рівнянням Фредгольма II роду. Воно може бути с будь-якою наперед заданою точністю апроксимовано СЛАР [6], що

означає можливість апроксимації ротора з довільним розподілом параметрів, ротором, що містить невагомий вал, який несе  $n$  дисків з масами  $m_i$ , і екваторіальними моментами інерції  $J_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Кожен з дисків внаслідок похибок виготовлення має радіальні ексцентриситети  $e_i$  і кутові  $\varepsilon_i$ , тобто відхилення вісі диску від осі, що проходить через центри інерції. При обертанні вал отримує прогини  $y_i$  і кути повороту  $y'_i$  (рис. 1).

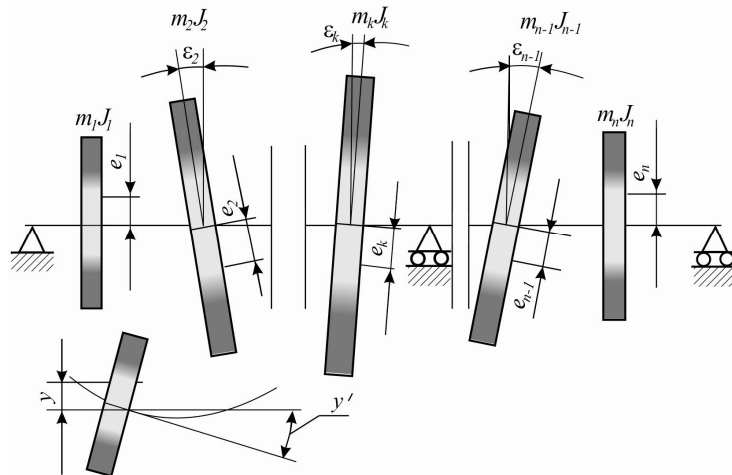


Рис. 1. Схема багатомасового ротора

Для наближеного розв'язання без врахування гіроскопічних моментів рівняння Фредгольма II роду замінюється матричним рівнянням виду

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mathbf{e})\omega^2, \quad (1)$$

де  $\mathbf{Y} = [y_i]_{1 \times n}$ ,  $\mathbf{e} = [e_i]_{1 \times n}$ ,  $\mathbf{A} = [a_{ik}]_1^n$ .

В цьому рівнянні координатами вектора  $\mathbf{Y}$  є прогини вала ротора в місцях посадки дисків, вектора  $\mathbf{e}$  - ексцентриситети цих дисків, а елементи матриці  $\mathbf{A}$  являють собою добуток статичних коефіцієнтів впливу на маси відповідних дисків.

Описана модель ідентифікована, тобто принципово, наприклад за теоремою Крамера, існує її єдиний розв'язок, але ця ж модель буде мати практичне значення лише в тому випадку, коли малі похибки, що виникають при зміні експериментально визначених величини, які входять у рівняння (1) в процесі його розв'язання, викличуть малі похибки при обрахунку ексцентриситетів, тобто коли модель стійка відносно вказаних факторів.

$$\Delta \mathbf{e} = -\mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} / \omega^2 - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} \Delta \omega^2 / \omega^4 - \Delta \mathbf{Y} + \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Y} / \omega^2.$$

Звідси в довільній нормі

Нехай замість системи (1) в дійсності розв'язується система

$$\mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y} = (\omega^2 + \Delta \omega^2)(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \times \quad (2)$$

$$\times (\mathbf{Y} + \mathbf{e} + \Delta \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{e})$$

тобто всі члени вихідного рівняння мають деякі невідомі похибки, що залежать від точності контрольно-вимірювальної апаратури і, звичайно ж, ці похибки малі у порівнянні з вимірювальними величинами.

Виділимо головний член похибки, віднімаючи від рівняння (2) рівняння (1) і нехтуючи членами другого і вище порядку малості.

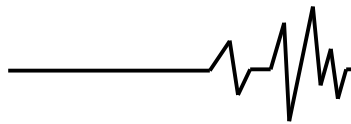
$$\Delta \mathbf{Y} = \omega^2 \Delta \mathbf{A} (\mathbf{Y} + \mathbf{e}) \Delta \omega^2 \mathbf{A} (\mathbf{Y} + \mathbf{e}) +$$

$$+ \omega^2 \Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{Y} + \omega^2 \Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{e}$$

Із рівняння (1) маємо

$$\mathbf{Y} + \mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} / \omega^2.$$

Підставляючи у попереднє рівняння, знаходимо



$$\|\Delta \mathbf{e}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \cdot \|\Delta \mathbf{Y}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \cdot \|\Delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|/\omega^2 + \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot |\Delta \omega^2| \cdot \|\Delta \mathbf{Y}\|/\omega^4. \quad (3)$$

З (3) легко отримати

$$\mathbf{Y}/\omega^2 - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{e}.$$

Тому

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{e}\|.$$

Звідси

$$\|\mathbf{e}\| \geq \|\mathbf{Y}\| / \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|. \quad (4)$$

Поділивши (3) на (4), отримаємо

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \|\mathbf{A}\|^2 \times \\ &\times \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \|\Delta \mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|/\omega^2 + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| |\Delta \omega^2|/\omega^2/\omega^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Відомо, що для довільної квадратної матриці  $\mathbf{A}$  добуток норми прямої матриці на обернену є її число обумовленості  $cond(\mathbf{A})$ , тобто  $cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}\|^{-1} \geq 1$ . Тому

$$\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \geq 1, \text{ і}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| &\leq cond(\mathbf{A}) cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| + \\ &+ cond(\mathbf{A})^2 \left[ cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})/\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \right] \|\Delta \mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|/\omega^2 + \\ &+ cond(\mathbf{A}) \left[ cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})/\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \right] |\Delta \omega^2|/\omega^2/\omega^2 \end{aligned} \quad (6)$$

З нерівності (6) видно, що теоретично балансування за статичними коефіцієнтами впливу стійке у вказаному вище сенсі. Однак практично не можна вважати, що прогини і похибки їх вимірювань можуть бути менше будь-яких наперед заданих величин, хоча б через те, що їх тоді немає чим виміряти, а відповідно, і судити про них, і тому при

дослідженні питань стійкості необхідно враховувати і обмежуватись точністю апаратури для вимірювань прогинів, швидкостей, коефіцієнтів впливу і т.д.

В частинних випадках одержуються наступні верхні оцінки відносної похибки ексцентриситетів:

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq cond(\mathbf{A}) \cdot cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \cdot \|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| \quad (7)$$

при  $\Delta \mathbf{A} = 0$  і  $\Delta \omega^2 = 0$ ,

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{cond(\mathbf{A}) cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \cdot |\Delta \omega^2|}{\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \cdot \omega^2} \quad (8)$$

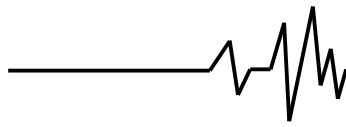
при  $\Delta \mathbf{Y} = 0$  і  $\Delta \mathbf{A} = 0$ ,

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{\omega^2} \cdot [cond(\mathbf{A})]^2 \cdot \frac{cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \cdot \|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}\|} \quad (9)$$

при  $\Delta \mathbf{Y} = 0$  і  $\Delta \omega^2 = 0$ .

Співвідношення (7) виражає умову стійкості розрахункової моделі за прогином, (8) – за частотою обертання, а (9) – за властивостями матриці  $\mathbf{A}$ .

Із теорії матриць відомо, що число обумовленості матриці показує, у скільки разів відносна похибка результату може



максимально перевищувати відносну похибку вихідної інформації.

Вияснимо фізичний зміст чисел обумовленості матриць  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}$ .

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \left( \max_i |\lambda_i| \right) / \left( \min_i |\lambda_i| \right), \quad \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) = \left( \max_i |\mu_i| \right) / \left( \min_i |\mu_i| \right),$$

Власні ж числа матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_1 \alpha_{11} & m_2 \alpha_{12} & \dots & m_n \alpha_{1n} \\ m_1 \alpha_{21} & m_2 \alpha_{22} & \dots & m_n \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \alpha_{n1} & m_2 \alpha_{n2} & \dots & m_n \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

знаходяться із умови рівності нулю визначника, в якому відсутня кутова швидкість

$$\det|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = 0, \quad (10)$$

де  $\mathbf{E}$  - одинична матриця.

Квадрати власних частот обертання описаної вище системи є коренями рівняння

$$\det|\omega_i^2 \mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0. \quad (11)$$

Із порівняння рівнянь (10) і (11) видно, що

$\lambda_i = 1/\omega_i^2$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тоді очевидно, що  $\lambda_{\max} = 1/\omega_1^2$ ,  $\lambda_{\min} = 1/\omega_n^2$ . тому

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \geq \omega_n^2 / \omega_1^2. \quad (12)$$

Отже, число обумовленості матриці  $\mathbf{A}$  оцінюється знизу відношенням квадратів максимальної і мінімальної власних частот обертання даної дискретної моделі ротора.

Природно, що чим більше розмірність  $n$ , тим точніше ця модель відповідає реальності, але тоді, як видно із (12), зростає і  $\text{cond}(\mathbf{A})$ , і, отже, похибка розв'язку. Отже, з одного боку, апроксимуючи реальний ротор великою кількістю зосереджених мас, ми наближаємо розрахункову схему до реальної конструкції і, відповідно, підвищуємо точність знаходження

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \left( \max_i |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| \right) / \left( \min_i |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| \right) \quad (15)$$

Як видно, максимальне і мінімальне значення  $\mu_i$  залежить від вибраної дискретної моделі, тобто кількості мас  $n$ , і від частоти обертання, на якій відбувається вимірювання, тобто проводиться балансування.

Припускаючи, що  $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ , нерівність (3.18) можна уточнити наступним чином. Якщо  $0 < \omega^2 < \omega_1^2$ , що мабуть,

Відомо [6], що число обумовленості матриці у евклідовій нормі може виражатись через відношення максимального і мінімального моделей її власних чисел, тобто

жорсткостей або коефіцієнтів впливу і всього розрахунку, а, з іншого боку, з ростом  $n$  збільшується число обумовленості матриці, тобто зростають похибки розрахунків. Вказане протиріччя є наслідком недосконалої алгоритму ідентифікації і ці міркування слід мати на увазі при обґрунтуванні допустимості описаної ідентифікації дисбалансів гнучких роторів і при врахуванні похибки даного способу балансування, підбираючи розумну з вказаної точки зору кількість дисків, що апроксимують реальний ротор. Це підкреслює той факт, що найбільш прийнятними і стійкими варіантами будуть відносно нескладні розрахункові моделі, які відрізняються тим, що в них використовуються отримані в результаті експериментів точні, еквівалентні даним розрахунковій схемі, значення параметрів: жорсткостей, мас, прогинів і т.д.

Розкриємо тепер фізичний зміст числа обумовленості матриці  $\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}$ . Маємо

$$\det|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A} - \mu \mathbf{E}| = 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) перетворюється до вигляду

$$0 = \det|\mathbf{A} + (\mu - 1/\omega^2) \mathbf{E}| = \det|\mathbf{A} - (1/\omega^2 - \mu) \mathbf{E}|. \quad (14)$$

Вище було отримано, що корені рівняння (14) мають вигляд

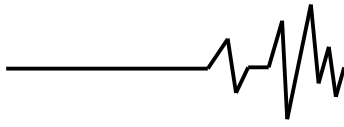
$$1/\omega^2 - \mu_i = 1/\omega_i^2 \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad \text{Звідси,} \\ \mu_i = 1/\omega^2 - 1/\omega_i^2 \quad i$$

бажано, то  $|1/\omega^2 - 1/\omega_i^2| = 1/\omega^2 - 1/\omega_i^2$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Тоді

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{\omega^{-2} - \omega_n^{-2}}{\omega^{-2} - \omega_1^{-2}} = \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2}.$$

У випадку, якщо  $\omega_k^2 \leq \omega^2 \leq \omega_{k+1}^2$ , то модулі власних значень  $\mu_i$  мають вигляд



$|\mu_1| = 1/\omega_1^2 - 1/\omega^2, \dots, |\mu_k| = 1/\omega_k^2 - 1/\omega^2$ , причому  $|\mu_k| < |\mu_{k+1}|$  при  $1/\omega_k^2 - 1/\omega^2 \leq 1/\omega^2 - 1/\omega_{k+1}^2$ , тобто при  $|\mu_{k+1}| = 1/\omega^2 - 1/\omega_{k+1}^2, |\mu_n| = 1/\omega^2 - 1/\omega_n^2$ .  $\omega^2 < 2\omega_k^2\omega_{k+1}^2 / (\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2) = \delta_k$ , в іншому випадку  $|\mu_k| \geq |\mu_{k+1}|$ .

Очевидно, що  $\max_i |\mu_i|$  може мати місце або про  $i=1$ , або при  $i=n$ , а  $\min_i |\mu_i|$  на розглянутому інтервалі кутових швидкостей має місце або при  $i=k$ , або при  $i=k+1$ ,

Таким чином

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| / |\omega^{-2} - \omega_k^{-2}| \text{ при } \omega_k^2 < \omega^2 < \delta_k, i=1, \text{ або } i=n,$$

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| / |\omega^{-2} - \omega_{k+1}^{-2}| \text{ при } \delta_k < \omega^2 < \omega_{k+1}^2, i=1, \text{ або } i=n.$$

Тобто

$$\begin{cases} \text{cond}(\mathbf{A})\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{|\omega_i^2 - \omega^2|}{|\omega_k^2 - \omega^2|} \cdot \frac{\omega_k^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} = \gamma \text{ при } \omega_k^2 < \omega^2 < \delta_k, i=1 \text{ або } i=n, \\ \text{cond}(\mathbf{A})\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{|\omega_i^2 - \omega^2|}{|\omega_{k+1}^2 - \omega^2|} \cdot \frac{\omega_{k+1}^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} = \gamma \text{ при } \delta_k < \omega^2 < \omega_{k+1}^2, i=1 \text{ або } i=n. \end{cases} \quad (16)$$

Графік залежності  $\gamma = \text{cond}(\mathbf{A})\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})$  від  $\omega^2$  (рис. 2) вибрана модель буде при кутових швидкостях, що визначаються виразом  $\omega = \omega_k \cdot \omega_{k+1} \sqrt{2 / (\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2)}$ . показує, що найменш стійкими ділянками частот обертання при балансуванні є області поблизу критичних частот. Найбільш стійкою

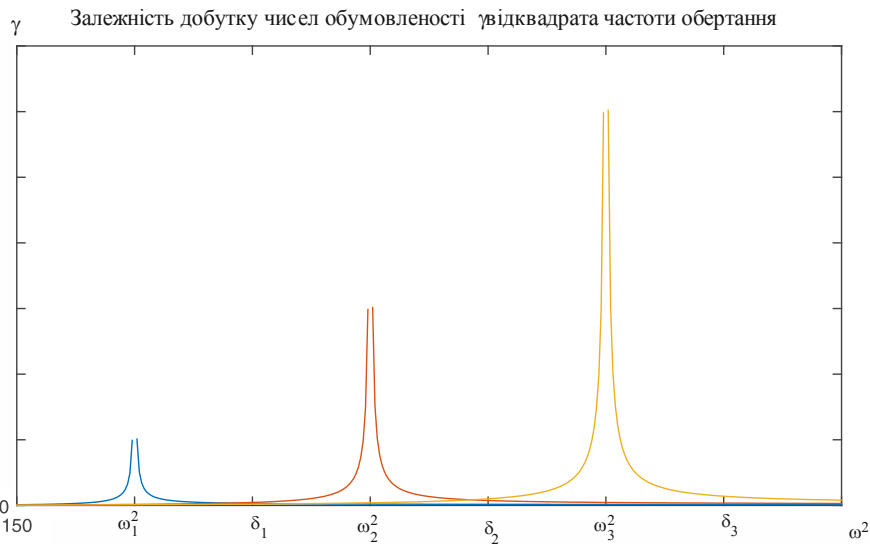
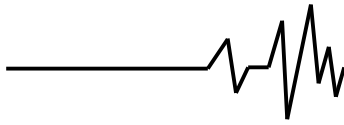


Рис. 2. Залежність добутку чисел обумовленості від квадрата частоти обертання при балансуванні

Більш того, алгоритм ідентифікації, а з ним і метод балансування тим більше стійкі, чим більше гнучкість ротора. Дійсно, розглянемо швидкість зростання  $\gamma$ , наприклад, у до критичній ділянці кутових швидкостей обертання ротора.

$$\frac{d\gamma}{d\omega^2} = \frac{\omega_n^2 - \omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} = \frac{\omega_n^2 / \omega_1^2 - 1}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} \cdot \omega_1^2 > 0,$$

Тобто чим менше співвідношення  $\omega_n^2 / \omega_1^2$ , або чим більше гнучкість ротора, тим меншою є



швидкість зростання похибки і навпаки – чим жорсткіше ротор, тим швидше зростає похибка розрахунку з зростанням частоти обертання

при балансуванні і наближенням її до критичної, що продемонстровано на рис. 3.

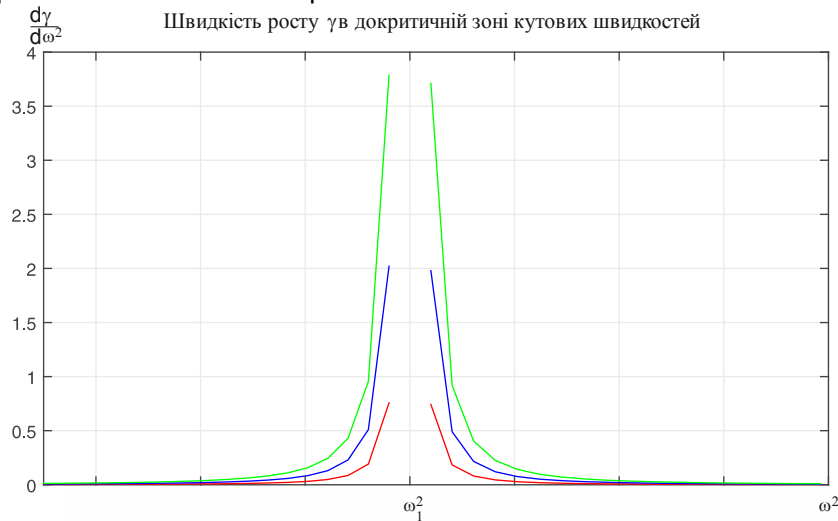


Рис. 3. Швидкість росту похибки ідентифікації для різних значень  $\omega_n^2 / \omega_1^2$

Формули (7-9) дають можливість вирішення деяких чисто практичних задач, зокрема за формулою (7), якщо заданий клас точності балансування ротора, яким визначається величина  $\Delta e/e$  і обрана розрахункова модель, а, отже,  $cond(\mathbf{A})cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})$ , можна знайти  $\Delta Y/Y$ , тобто відносну похибку апаратури для вимірювання прогинів і підібрати підходящу апаратуру.

Якщо ж є вимірювальна апаратура і вибрана модель ротора, можна визначити можливу точність балансування.

Нарешті, якщо заданий клас точності балансування і є апаратура для вимірювання прогинів, можна знайти ту розрахункову модель, яка б забезпечила виконання необхідної точності балансування.

Це ж відноситься і до формул (8) і (9), де мова йде відповідно про вимірювання частоти обертання і обладнання для вимірювання статичних коефіцієнтів впливу.

Рівняння, яке описує рух гнучкого ротора з врахуванням гіроскопічних сил в матричній формі може бути записане в тому ж вигляді, що і без врахування гіроскопії, тобто у вигляді (1), де тепер вектор-стовпець  $\mathbf{Y}$  містить не тільки прогин, але і кут повороту  $\mathbf{Y}'$ , тобто

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n]^T,$$

а вектор-стовпець  $\mathbf{e}$  - і радіальні  $e$ , і кутові  $\varepsilon$  - ексцентриситети  $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$ , а матриця  $\mathbf{A}$  має вигляд

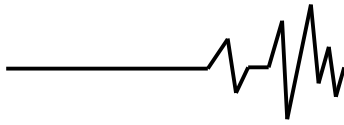
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}m_1 & a_{12}m_2 & a_{1n}m_n & -I_1\beta_{11} & -I_2\beta_{12} & -I_n\beta_{1n} \\ a_{21}m_1 & a_{22}m_2 & a_{2n}m_n & -I_1\beta_{21} & -I_2\beta_{22} & -I_n\beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}m_1 & a_{n2}m_2 & a_{nn}m_n & -I_1\beta_{n1} & -I_2\beta_{n2} & -I_n\beta_{nn} \\ \gamma_{11}m_1 & \gamma_{12}m_2 & \gamma_{1n}m_n & -I_1\delta_{11} & -I_2\delta_{12} & -I_n\delta_{1n} \\ \gamma_{21}m_1 & \gamma_{22}m_2 & \gamma_{2n}m_n & -I_1\delta_{21} & -I_2\delta_{22} & -I_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}m_1 & \gamma_{n2}m_2 & \gamma_{nn}m_n & -I_1\delta_{n1} & -I_2\delta_{n2} & -I_n\delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Розв'язок цього рівняння, як і раніше, має вигляд  $\mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\mathbf{Y}$ , але розв'язуючи

рівняння (11), можна отримати в 2 рази більше коренів, ніж без врахування гіроскопічного моменту, і таким чином, врахування гіроскопії збільшує число обумовленості матриці і похибку ідентифікації ексцентриситетів, і цю обставину необхідно мати на увазі при виборі динамічної моделі.

До цього ж висновку можна було дійти менш строгим, але очевидним шляхом, вважаючи зосереджену масу у вигляді диску, що має гіроскопічний момент, такою, що еквівалентна двом точковим масам, пов'язаними разом з напрямленими у протилежні сторони відцентровими силами.

**Висновки.** Вперше розкрито фізичний зміст чисел обумовленості системи лінійних алгебраїчних рівнянь в задачі ідентифікації ексцентриситетів з використанням статичних коефіцієнтів впливу. Обґрунтовані значення



частот обертання ротора, що відповідають найменш и найбільш стійким розв'язкам задачі при балансуванні ротора як гнучкого. Врахування гіроскопії збільшує число обумовленості матриці і похибку ідентифікації ексцентриситетів, і цю обставину необхідно мати на увазі при виборі динамічної моделі.

#### **Список використаних джерел**

1. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин / А. Г. Костюк. – 3-е изд. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 476 с.
2. Добрянский Т.В. Динамика авиационных ГТД / Т.В. Добрянский, Т.С. Мартыанова – М: Машиностроение, 1989. – 240 с.
3. Воробьев Ю.С. Исследование колебаний систем элементов турбогенераторов / Ю.С. Воробьев, Н.Г. Шульженко – К: Наук. Думка, 1976. – 135 с.
4. Ройзман В.П. Динамика и уравновешивание упруго-деформируемых роторов ГТД / В.П. Ройзман – Сб. «Динамика гибких роторов», Изд. «Наука», М., 1972.
5. Левит М.Е. Основы балансировочной техники. Том 2. Уравновешивание гибких роторов и балансировочное оборудование / М.Е. Левит, В.П. Ройзман, и др. Под ред. В.А. Щепетильникова. – М.: Машиностроение, 1975. – 679 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Наука, 1973. – 631 с.

#### **Список джерел в транслітерації**

1. Kostyuk A. G. Dinamika i prochnost turbomashin / A. G. Kostyuk. –3-e izd. – М.: Izdatelskiy dom MEI, 2007. – 476 s.
2. Dobryanskiy T.V. Dinamika aviatsionnyih GTD / T.V. Dobryanskiy, T.S. Martyanova – М: Mashinostroenie, 1989. – 240 s.
3. Vorobev Yu.S. Issledovanie kolebaniy sistem elementov turbogeneratorov / Yu.S. Vorobev, N.G. Shulzhenko – К: Nauk. Dumka, 1976. – 135 s.
4. Royzman V.P. Dinamika i uravnoveshivanie uprugodeformiruemyih rotorov GTD / V.P. Royzman – Sb. «Dinamika gibkikh rotorov», Izd. «Nauka», М., 1972.
5. Levit M.E. Osnovy balansirovochnoy tehniky. Tom 2. Uravnoveshivanie gibkikh rotorov i balansirovochnoe oborudovanie / M.E. Levit, V.P. Royzman, i dr. Pod red. V.A. Schepetilnikova. – М.: Mashinostroenie, 1975. – 679 s.
6. Bahvalov N.S. Chislennyye metody: Analiz, algebra, obyiknovennyye differentsialnyie uravneniya / N.S. Bahvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobelkov – М.: Nauka, 1973. – 631 s.

### **УСТОЙЧИВОСТЬ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ГИБКИХ РОТОРОВ**

**Аннотация.** Показана актуальность исследований устойчивости алгоритмов идентификации товаров, которые быстро вращаются, с целью получения устойчивых и точных результатов. Раскрыт физический смысл чисел обусловленности системы линейных алгебраических уравнений в задаче идентификации эксцентриситетов с использованием статических коэффициентов влияния. Число обусловленности матрицы оценивается снизу отношением квадратов максимальной и минимальной собственных частот вращения данной дискретной модели ротора. Установлены участки частот, соответствующие наиболее устойчивым решениям задачи при балансировке ротора как гибкого. Наименее устойчивыми участками частот вращения при балансировке есть области вблизи критических частот. Установлено, что алгоритм идентификации, а с ним и метод балансировки тем более устойчивы, чем больше гибкость ротора. Учет гироскопии увеличивает число обусловленности матрицы и погрешность идентификации эксцентриситетов, и это обстоятельство необходимо иметь в виду при выборе динамической модели.

**Ключевые слова:** устойчивость, идентификация, ротор, эксцентриситет, число обусловленности.

### **STABILITY OF ALGORITHMS IDENTIFICATION OF FLEXIBLE ROTORIV**

**Annotation.** The urgency of research of stability of algorithms identify the goods, which are rapidly rotating, in order to obtain stable and accurate results. Disclosed is the physical meaning of the condition numbers of the system of linear algebraic equations in the problem of identification of eccentricities using static factors of influence. The condition number of the matrix is estimated to reduce the ratio of the squares of their own maximum and minimum speeds of the discrete model of the rotor. Established areas of frequencies corresponding to the most stable solutions of the problem in balancing the rotor as a flexible. The least stable part speeds Balancing there are areas near the critical frequency. It is found that the identification algorithm, and with it the method of balancing the more stable the greater flexibility of the rotor. Accounting gyroscope increases the number of a matrix and identification error of eccentricity, and this should be borne in mind when choosing a dynamic model.

**Key words:** stability, identification, rotor, eccentricity, condition number.