

ВСЕБІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СКЛАДОВИХ СИЛ ОБОРОНИ

DOI: <https://doi.org/10.37129/2313-7509.2019.12.2.5-13>

УДК 629.113+623.41

О.П. Угольніков, к.ф.-м.н., доц.**Б.О. Дем'янчук**, д.т.н.**Н.О. Колесниченко**, к. т. н.**О.А. Малиновський***Військова академія (м. Одеса), Україна*

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМАХ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Розглянуто динамічні моделі процесів в системах транспортної логістики. У літературі такі складні системи часто моделюють у вигляді сукупності типових станів системи. Ці стани пов'язані між собою великою кількістю переходів заданої інтенсивності, які здійснюються з заданими ймовірностями. Графічно це представляється за допомогою так званого графа станів і переходів, і предметом дослідження в такому графі є ймовірності перебування системи в тому чи іншому стані.

Проаналізовано наявні в літературі методи дослідження динамічних характеристик графів за допомогою систем диференціальних рівнянь, які розв'язують наближеними методами. Пропонується метод точного розв'язання системи диференціальних рівнянь, заснований на використанні операційного числення. Метод застосований для опису процесу відновлення транспортного потоку військової логістики. Встановлено межі можливості застосування результатів більш простого наближеного розв'язання.

Ключові слова: динамічні моделі, системи диференціальних рівнянь, операційне числення, точне визначення ймовірностей станів транспортного потоку.

Постановка проблеми

У сучасних умовах високотехнологічних протистоянь вже неможливо планувати сили та ресурси, необхідні для виконання завдань служби технічного забезпечення, покладаючись тільки на практичний досвід організаторів транспортних потоків.

Наукові розробки в областях аналізу ситуації та організації виконання таких завдань, як проведення маршруту або відновлення техніки під час маршруту [1-2], дозволяють отримати адекватні динамічні моделі, що описують ймовірності перебування транспортних потоків в різних станах в залежності від часу. Ці моделі з математичної точки зору являють собою системи диференціальних рівнянь, як правило, лінійних, до яких додаються деякі обмеження. Розв'язання систем принципів труднощів не становить [3-4], але з технічного боку є доволі складною та трудомісткою задачею. Ці труднощі швидко зростають при збільшенні кількості рівнянь (числа можливих станів системи).

Необхідність отримання точного розв'язку очевидна, оскільки його наявність дає можливість надійно прогнозувати поведінку динамічної системи технічного забезпечення, а саме: ймовірність її перебування в стані готовності до дій; ймовірність її перебування у стані відновлення після отримання пошкоджень внаслідок експлуатації або дій супротивника; планувати необхідні сили та засоби, а також матеріальні ресурси, що дозволяють підтримувати техніку у стані готовності до виконання завдань, що покладені на службу технічного забезпечення бойових дій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Об'єктом дослідження є деяка динамічна підсистема військової транспортної логістики, яка може знаходитись у n різних станах S_i з ймовірностями P_i , що залежать від часу t . Переходи між

станами S_i та S_j характеризуються інтенсивністю h_{ij} та ймовірністю H_{ij} . Тоді система лінійних диференціальних рівнянь, яка описує залежність від часу ймовірностей $P_i(t)$ перебування цієї підсистеми у відповідних станах S_i , має вигляд [1-2]:

$$\dot{P}_i(t) = \sum_{j \neq i}^n a_{ij} P_j(t) - a_{ii} P_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (1)$$

де $\dot{P}_i(t) = \frac{dP_i}{dt}$ – похідна ймовірності за часом; $a_{ij}(t) = h_{ij} H_j$ ($i \neq j$), $a_{ii} = \sum_{j \neq i}^n a_{ji}$ – коефіцієнти системи (1), що характеризують вплив ймовірностей P_j перебування підсистеми у станах S_j на швидкість зміни ймовірності P_i перебування підсистеми у стані S_i .

На невідомі функції $P_i(t)$ накладаються обмеження. Це, по-перше, початкові умови:

$$P_i(0) = P_i^0 \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (2)$$

що задають значення ймовірностей у початковий момент часу, і, по-друге, умова нормування

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) = 1, \quad (3)$$

яка відображає той факт, що сукупність усіх станів системи утворює повну групу подій.

В роботі [1] розв'язання системи (1) приводить до системи алгебраїчних рівнянь вигляду

$$P_i(t) = \sum_{j \neq i}^n a_{ij} P_j(t) \cdot \frac{1 - e^{-a_{ii} t}}{a_{ii}} \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (4)$$

Детальний аналіз показує, що розв'язок у вигляді (4) отриманий за наступних припущень:

1) При інтегруванні i -го рівняння системи (1) береться до уваги залежність від часу тільки функції $P_i(t)$, а функції $P_j(t)$ ($j \neq i$) розглядаються як сталі величини. За цього припущення система (1) розпадається на n незалежних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку, методи розв'язання яких добре відомі [3-4].

2) Початкові умови системи (1) нульові, тобто $P_i^0 = 0$ ($i=1,2,\dots,n$).

Якби не було умови нормування (3), то система алгебраїчних рівнянь (4) мала б тільки нульове розв'язання: $P_i(t) \equiv 0$. Умова нормування (3) вказує, що рівняння системи (1) є лінійно залежними, тому одна з функцій $P_i(t)$ може бути вибрана довільною, наприклад, $P_1(t) = u(t)$, де $u(t)$ – будь-яка функція, що задовольняє умові $u(0) = 1$. Тоді всі інші функції $P_i(t)$, $i \neq 1$ можуть бути записані у вигляді $P_i(t) = k_i(t) \cdot u(t)$, де $k_i(t)$ – функції, конкретний вигляд яких визначається з рівностей (4). Після цього використання умови нормування (3) дозволяє визначити конкретний вигляд функції $u(t)$, яка раніше вважалася довільною:

$$u(t) = 1 / \sum_{i=1}^n k_i(t),$$

причому $k_1(t) \equiv 1$. Саме у такому вигляді отримані результати в [1-2] одним з авторів даної роботи.

Постановка завдання

Метою даної роботи є одержання точного розв'язку системи диференціальних рівнянь (1), вільного від вказаних вище припущень та задовольняючого довільні початкові умови (2), та застосування одержаних загальних співвідношень до дослідження якої-небудь реальної задачі системи технічного забезпечення.

Вирішення поставленого завдання дозволяє виконати порівняння результатів точного та наближеного розв'язань цієї задачі, порівняння затрат часу на отримання точного та наближеного розв'язків та їх використання у практичній роботі при плануванні роботи служб транспортної логістики, аналіз впливу початкових умов на чисельні результати розрахунків, висновки щодо обмежень застосування точного та наближеного розв'язків розглянутої динамічної моделі.

Виклад основного матеріалу

В роботах [1-2] розглядаються різні динамічні моделі процесів технічного забезпечення, які описуються системами двох, трьох та чотирьох лінійних диференціальних рівнянь. Для визначеності покажемо послідовність отримання точного розв'язку узагальненої моделі процесу технічного забезпечення відновлення пошкоджених автомобільних засобів. Вона описується системою вигляду (1), що містить чотири лінійних диференціальних рівняння:

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = -a_{11}P_1(t) + a_{12}P_2(t), \\ \dot{P}_2(t) = a_{21}P_1(t) - a_{22}P_2(t) + a_{23}P_3(t) + a_{24}P_4(t), \\ \dot{P}_3(t) = a_{31}P_1(t) + a_{32}P_2(t) - a_{33}P_3(t), \\ \dot{P}_4(t) = a_{41}P_1(t) + a_{42}P_2(t) + a_{43}P_3(t) - a_{44}P_4(t), \end{cases} \quad (5)$$

(всі інші коефіцієнти a_{ij} дорівнюють нулю) з довільними початковими умовами $P_1(0) = P_1^0$, $P_2(0) = P_2^0$, $P_3(0) = P_3^0$, $P_4(0) = P_4^0$. Найчастіше для розв'язання таких систем використовуються методи підстановки та операційного числення [4-5]. Порівняння, проведене авторами роботи на основі власних розрахунків, показує, що метод операційного числення, що базується на перетворенні Лапласа, [5] є простішим у реалізації і потребує меншого часу. Тому зупинимося на застосуванні цього методу до розв'язання системи (5) докладніше. Далі для більш компактного запису не будемо вказувати аргумент t після знаку функції $P_i(t)$ або її похідної за часом $\dot{P}_i(t)$.

Спочатку скористаємося тим, що рівняння системи зв'язані умовою нормування і не є незалежними. Це дозволяє виключити одне з рівнянь і розглядати вже систему трьох незалежних рівнянь. Виключимо, наприклад, четверте рівняння за допомогою співвідношення $P_4 = 1 - P_1 - P_2 - P_3$ і підставимо цей вираз до інших рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -a_{11}P_1 + a_{12}P_2, \\ \dot{P}_2 = a_{21}P_1 - a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + a_{24}(1 - P_1 - P_2 - P_3), \\ \dot{P}_3 = a_{31}P_1 + a_{32}P_2 - a_{33}P_3. \end{cases} \quad (6)$$

Позначимо $a'_{21} = a_{21} - a_{24}$, $a'_{22} = a_{22} + a_{24}$, $a'_{23} = a_{23} - a_{24}$, тоді система (6) матиме простіший вигляд:

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -a_{11}P_1 + a_{12}P_2, \\ \dot{P}_2 = a'_{21}P_1 - a'_{22}P_2 + a'_{23}P_3 + a_{24}, \\ \dot{P}_3 = a_{31}P_1 + a_{32}P_2 - a_{33}P_3. \end{cases} \quad (7)$$

Виконаємо перетворення Лапласа і перейдемо до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих зображень $X_i = X_i(p)$ (p – комплексна змінна):

$$\begin{cases} pX_1 - P_1^0 = -a_{11}X_1 + a_{12}X_2, \\ pX_2 - P_2^0 = a'_{21}X_1 - a'_{22}X_2 + a'_{23}X_3 + \frac{a_{24}}{p}, \\ pX_3 - P_3^0 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 - a_{33}X_3, \end{cases} \quad (8)$$

де $P_i(t) \rightarrow X_i(p)$, $\dot{P}_i(t) \rightarrow pX_i(p) - P_i^0$ – зображення по Лапласу невідомих функцій $P_i(t)$ та їх похідних $\dot{P}_i(t)$. Розв'язавши систему відносно невідомих $X_i(p)$, одержимо:

$$\begin{cases} X_1(p) = \frac{(a_{12}P_3^0 - a_{32}P_1^0)a'_{23}p + [(P_2^0 p + a_{24})a_{12} + (p + a'_{22})P_1^0 p](p + a_{33})}{p[(p + a_{11})(p + a'_{22})(p + a_{33}) - a_{12}a'_{21}(p + a_{33}) - a'_{23}a_{32}(p + a_{11}) - a_{12}a'_{23}a_{31}]}, \\ X_2(p) = \frac{[a'_{23}P_3^0 p + (P_2^0 p + a_{24})(p + a_{33})](p + a_{11}) + P_1^0 [(p + a_{33})a'_{21}p + a'_{23}a_{31}]}{p[(p + a_{11})(p + a'_{22})(p + a_{33}) - a_{12}a'_{21}(p + a_{33}) - a'_{23}a_{32}(p + a_{11}) - a_{12}a'_{23}a_{31}]}, \\ X_3(p) = \frac{[a_{32}(p + a_{11}) + a_{31}a_{12}](P_2^0 p + a_{24}) + [a_{31}(p + a'_{22}) + a_{32}a'_{21}]P_1^0 p + [(p + a_{11})(p + a'_{22}) - a_{12}a'_{21}]P_3^0 p}{p[(p + a_{11})(p + a'_{22})(p + a_{33}) - a_{12}a'_{21}(p + a_{33}) - a'_{23}a_{32}(p + a_{11}) - a_{12}a'_{23}a_{31}]} \end{cases} \quad (9)$$

Знайшовши зображення $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ невідомих функцій $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, можна, виконавши обернене перетворення Лапласа, відшукати самі функції. Для цього, як правило, використовують таблиці оберненого перетворення основних елементарних функцій та властивості перетворення Лапласа [5]. Оскільки функції $X_i(p)$ ($i = 1, 2, 3$) є правильними раціональними дробами, їх можна розкласти на суми елементарних дробів (у нашому конкретному випадку – першого типу), для чого необхідно спочатку знайти нулі знаменника, розв'язавши кубічне рівняння (знаменник є многочленом четвертого степеню, але він не містить вільного члену, тому один з коренів дорівнює нулю: $p_0 = 0$):

$$(p + a_{11})(p + a'_{22})(p + a_{33}) - a_{12}a'_{21}(p + a_{33}) - a'_{23}a_{32}(p + a_{11}) - a_{12}a'_{23}a_{31} = 0$$

або

$$p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma = 0, \quad (10)$$

де

$$\alpha = a_{11} + a'_{22} + a_{33}, \quad \beta = a_{11}a'_{22} + a_{11}a_{33} + a'_{22}a_{33} - a'_{23}a_{32} - a_{12}a'_{21}, \quad \gamma = a_{11}a'_{22}a_{33} - a_{11}a'_{23}a_{32} - a_{12}a'_{21}a_{33} - a_{12}a'_{23}a_{31}.$$

Зі змісту задачі, що розв'язується, випливає, що всі корені цього рівняння повинні бути дійсними (та від'ємними). Тому для їх знаходження більш зручною є формула Вієта [6]:

$$p_k = 2\sqrt{-\frac{r}{3}} \cos \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{3} - \frac{\alpha}{3} \quad (k = 1, 2, 3),$$

де

$$r = -\frac{\alpha^2}{3} + \beta, \quad q = 2\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma, \quad \varphi = \arccos \left[-\frac{q}{2} \left(-\frac{3}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right],$$

Після знаходження коренів рівняння кожену функцію $X_i(p)$ ($i = 1, 2, 3$) можна, як було сказано вище, розкласти на алгебраїчну суму елементарних дробів, тобто записати розв'язок (9) у вигляді:

$$\begin{cases} X_1(p) = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3}, \\ X_2(p) = \frac{B_0}{p} + \frac{B_1}{p - p_1} + \frac{B_2}{p - p_2} + \frac{B_3}{p - p_3}, \\ X_3(p) = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2}{p - p_2} + \frac{C_3}{p - p_3}. \end{cases} \quad (11)$$

Обернене перетворення Лапласа для елементарного дроби $1/(p - p_k)$ має вигляд

$$\frac{1}{p - p_k} \rightarrow e^{p_k t}.$$

Для обчислення невизначених коефіцієнтів A_k, B_k, C_k ($k=1, 2, 3$) скористаємось відомим методом підстановки нулів знаменника p_k ($k=0, 1, 2, 3$). [6]. Він полягає у тому, що дроби у правих частинах виразів у системі (11) приводяться до спільного знаменника, а потім вимагають рівності чисельників одержаних дробів та чисельників дробів у системі (9), які ми позначимо через $R_1(p), R_2(p), R_3(p)$, при значеннях комплексної змінної $p = p_k$ ($k=0, 1, 2, 3$), які є нулями знаменника. Це дає для обчислення невідомих коефіцієнтів розкладу A_k, B_k, C_k ($k=1, 2, 3$) вирази

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{R_1(p_0)}{p_1 p_2 p_3}, & A_1 &= \frac{R_1(p_1)}{p_1(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}, & A_2 &= \frac{R_1(p_2)}{p_2(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)}, & A_3 &= \frac{R_1(p_3)}{p_3(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)}; \\ B_0 &= -\frac{R_2(p_0)}{p_1 p_2 p_3}, & B_1 &= \frac{R_2(p_1)}{p_1(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}, & B_2 &= \frac{R_2(p_2)}{p_2(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)}, & B_3 &= \frac{R_2(p_3)}{p_3(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)}; \\ C_0 &= -\frac{R_3(p_0)}{p_1 p_2 p_3}, & C_1 &= \frac{R_3(p_1)}{p_1(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}, & C_2 &= \frac{R_3(p_2)}{p_2(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)}, & C_3 &= \frac{R_3(p_3)}{p_3(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)}. \end{aligned}$$

Після цього розв'язок вихідної системи диференціальних рівнянь (5) остаточно має вигляд

$$\begin{cases} P_1(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}, \\ P_2(t) = B_0 + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + B_3 e^{p_3 t}, \\ P_3(t) = C_0 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t}, \\ P_4(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t) - P_3(t). \end{cases} \quad (12)$$

Описаний підхід був застосований до конкретного чисельного прикладу, наближено розв'язаного в [1-2], маючи за мету порівняння і аналіз результатів. У цьому прикладі всі $h_{ij} = \frac{1}{9}$, $H_{ij} = \frac{1}{2}$, тому коефіцієнти системи (7) дорівнюють

$$a_{11} = \frac{1}{6}, \quad a_{12} = \frac{1}{18}, \quad a'_{21} = 0, \quad a'_{22} = \frac{2}{9}, \quad a'_{23} = 0, \quad a_{24} = \frac{1}{18}, \quad a_{31} = \frac{1}{18}, \quad a_{32} = \frac{1}{18}, \quad a_{33} = \frac{1}{9}.$$

Розв'язання кубічного рівняння (10) приводить до значень $p_1 = -\frac{1}{9}$, $p_2 = -\frac{2}{9}$, $p_3 = -\frac{1}{6}$, а обчислення невизначених коефіцієнтів для початкових умов

$$P_1^0 = P_3^0 = P_4^0 = 0, \quad P_2^0 = 1 \quad (13)$$

дає наступні величини:

$$A_0 = \frac{1}{12}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{3}{4}, \quad A_3 = \frac{2}{3}; \quad B_0 = \frac{1}{4}, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{3}{4}, \quad B_3 = 0; \quad C_0 = \frac{1}{6}, \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{2}{3}.$$

Підставивши знайдені значення до системи (12), одержимо функції $P_i(t)$, що описують залежність ймовірності перебування системи технічного забезпечення у тому чи іншому стані S_i . Якщо перейти до позначень, прийнятих в роботах [1-2], то матимемо

$$\begin{cases} P_{II}(t) = P_1(t) = \frac{1}{12} - \frac{3}{4} e^{-\frac{2}{9}t} + \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{6}t}, \\ P_3(t) = P_2(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-\frac{2}{9}t}, \\ P_B(t) = P_3(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{9}t}, \\ P_O(t) = P_4(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{9}t} - \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{6}t}. \end{cases} \quad (14)$$

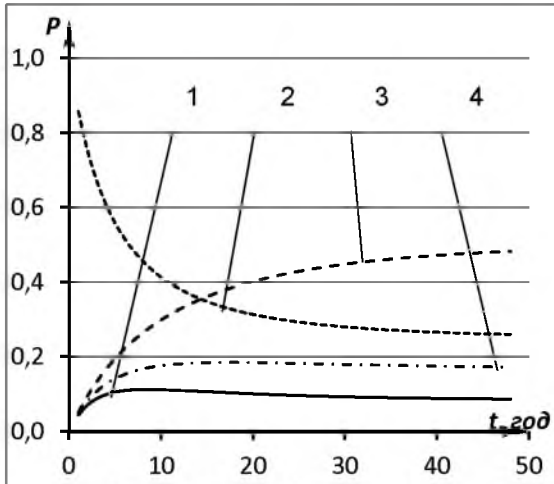
де: $P_{II}(t)$ – ймовірність перебування системи у стані підготовки техніки з метою її застосування;

$P_3(t)$ – ймовірність перебування системи у стані застосування техніки за призначенням;

$P_B(t)$ – ймовірність перебування системи у стані відновлення техніки після її пошкодження;

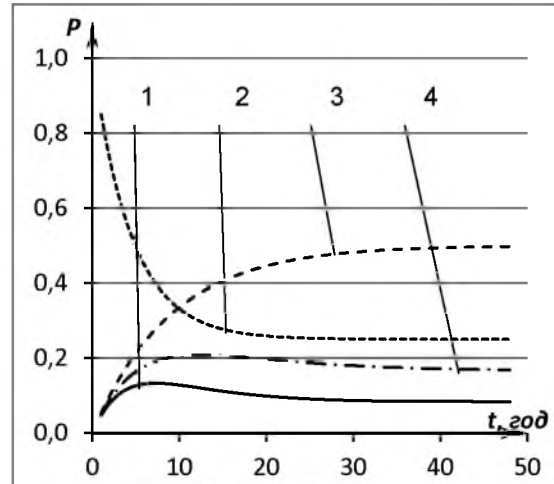
$P_O(t)$ – ймовірність перебування системи у стані обслуговування пошкодженої техніки.

Результати розрахунку залежності ймовірностей від часу, одержані за наближеними та точними формулами, наведені на рис. 1 та рис. 2, відповідно. Порівняння результатів демонструє, що якісно результати подібні, але кількісний аналіз на основі цих графіків виконати неможливо.



1 – P_{II} ; 2 – P_3 ; 3 – P_B ; 4 – P_O

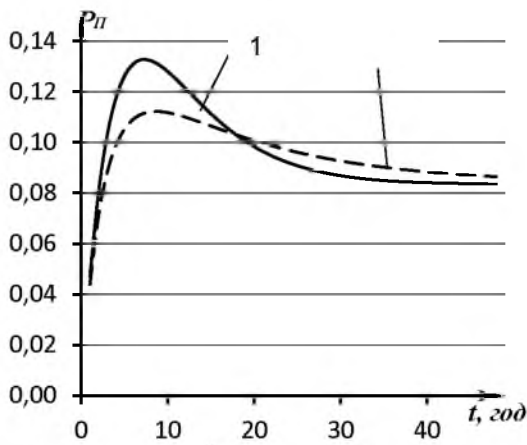
Рис. 1. Наближений розв'язок



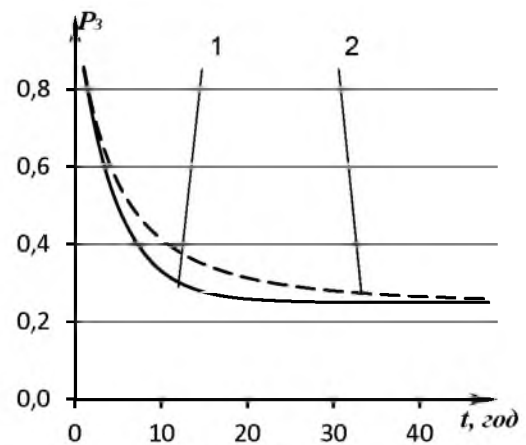
1 – P_{II} ; 2 – P_3 ; 3 – P_B ; 4 – P_O

Рис. 2. Точний розв'язок

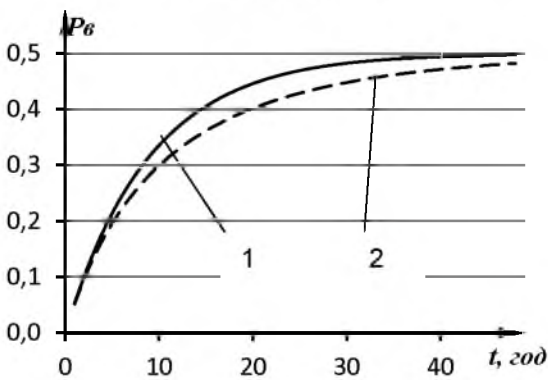
Більш детальну інформацію для аналізу дає порівняння поведінки ймовірностей перебування системи в різних станах по результатах наближеного та точного розрахунків (рис. 3).



а) Ймовірність P_{II}

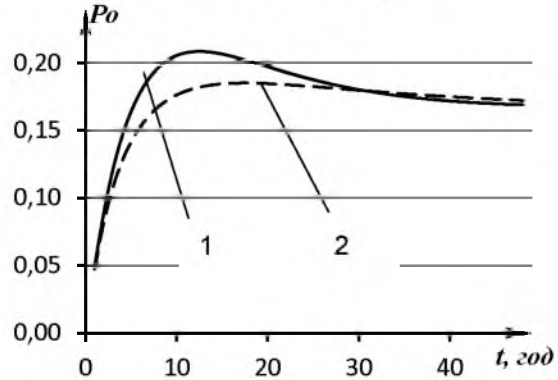


б) Ймовірність P_3



в) Ймовірність P_B

1 – точний розв'язок;



г) Ймовірність P_O

2 – наближений розв'язок

Рис. 3. Порівняння точного та наближеного розв'язків для ймовірностей окремих станів

Графіки, наведені на рис. 3, вказують, що різницю між точним та наближеним результатами не можна ігнорувати. На початковому інтервалі часу ($t \leq 5$ годин) криві для ймовірностей всіх станів добре описується як точними, так і наближеними залежностями. Після виходу на стаціонарний режим ($t \geq 30$ годин) ці результати також майже співпадають. Але для проміжних інтервалів ($5 < t < 30$ годин) різниця між результатами наближених та точних розрахунків є суттєвою, і її необхідно брати до уваги. Оскільки стан відновлення техніки після отриманих пошкоджень має найвищу ймовірність для даної моделі ($P_B(t) \sim 0.5$), то орієнтуватись при виборі розрахункових залежностей необхідно саме на цю функцію.

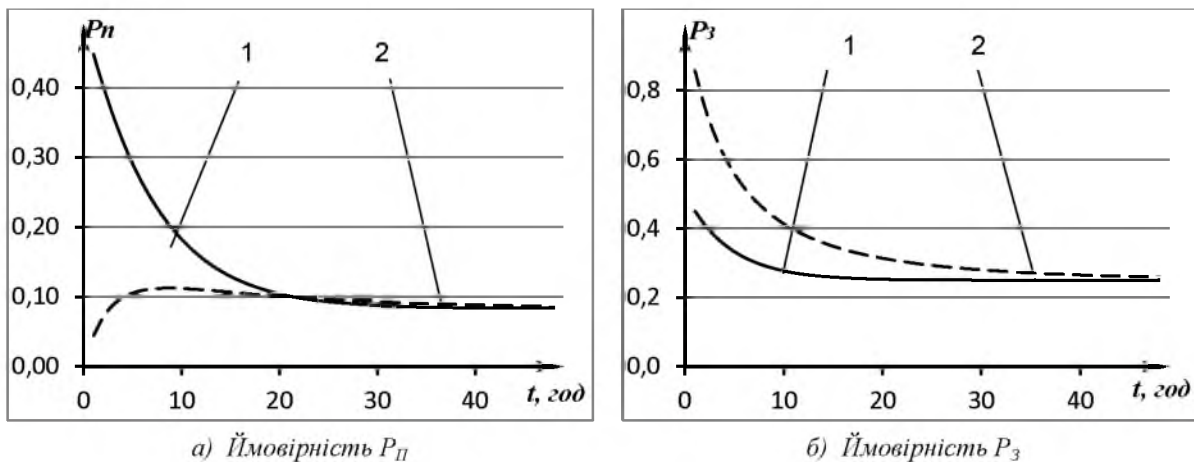
Наостанок необхідно зробити ще три зауваження. По-перше, хоча отримати точний розв'язок в аналітичній формі набагато складніше, ніж наближений, і це вимагає набагато більше часу, остаточні вирази для залежності ймовірностей станів системи від часу при цьому мають більш простий вигляд, ніж наближені результати. Наприклад, точний вигляд функції у формулі (14) дуже простий:

$$P_B(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{9}t},$$

у той час як наближене розв'язання дає вираз

$$P_B(t) = \frac{2 - 2e^{-\frac{1}{18}t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{9}t} + \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}t} + e^{-\frac{2}{9}t} + \frac{1}{6}e^{-\frac{5}{18}t} - \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{3}t}}{4 - 2e^{-\frac{1}{18}t} - \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{9}t} - \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}t} + e^{-\frac{2}{9}t} + \frac{1}{3}e^{-\frac{5}{18}t} - \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{3}t}},$$

По-друге, точне розв'язання має незаперечну перевагу, особливо на початковому етапі, якщо початкові умови відрізняються від (13): одна з ймовірностей при $t = 0$ дорівнює одиниці, усі інші – нулю. При цьому різниця між наближеним та точним розв'язками стає набагато більшою. Наприклад, якщо $P_{II}^0 = P_3^0 = 0,5$, $P_B^0 = P_O^0 = 0$, то наближені значення всіх функцій не змінюються, точні значення функцій $P_B(t)$ і $P_O(t)$ також, а порівняння графіків точних і наближених значень функцій $P_{II}(t)$ і $P_3(t)$ на рис. 4 демонструє недоцільність використання наближеного розв'язку, особливо на початкових та проміжних етапах розвитку динаміки системи ($t < 20 - 30$ годин).



а) Ймовірність P_{II}

б) Ймовірність P_3

1 – точний розв'язок; 2 – наближений розв'язок

Рис. 4. Точні та наближені результати для ймовірностей окремих станів при зміні початкових умов

И по-третє, труднощі отримання точного розв'язку швидко зростають при збільшенні числа можливих станів системи (кількості диференціальних рівнянь у системі), і при числі рівнянь більше п'яти виконати точне аналітичне розв'язання у загальному випадку неможливо, оскільки, алгебраїчні рівняння степеню вище четвертого у загальному випадку неможливо розв'язати аналітично.

Перспективи подальших досліджень

Подальші дослідження в області точного розв'язання задач дослідження динаміки систем автотехнічного забезпечення повинні дати точні вирази для ймовірностей перебування системи у різних станах для найбільш загального випадку системи диференціальних рівнянь (5), коли всі коефіцієнти системи a_{ij} відмінні від нуля. Другий напрямок досліджень полягає у точному розв'язанні системи диференціальних рівнянь, що описує динаміку системи технічного забезпечення транспортної військової логістики [2], яка може знаходитись у п'яти різних станах i , відповідно, описується системою чотирьох незалежних диференціальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Дем'янчук Б.О., Вертівський С.М., Меленчук В.М. *Основи автотехнічного забезпечення. Моделювання процесів: навчальний посібник.* Одеса: Військова академія, 2015. 330 с.
2. *Основи військової логістики. Прогнозні моделі забезпечення: навчальний посібник.* О. В. Гуляк та ін.; Одеса: Військова академія, 2019. 262 с.
3. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. 576 с.
4. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1961. 312 с.
5. Диткин В.А., Вертівський С.М., Меленчук В.М. *Операционное исчисление.* Москва: Высшая школа, 1966. 408 с.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ АВТОТЕХНИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

А.П. Угольников, Б.А. Демьянчук, Н.А. Колесниченко, О.А. Малиновский.

Рассмотрены динамические модели процессов в системах транспортной логистики. В литературе такие сложные системы часто моделируют в виде совокупности типичных состояний системы. Эти состояния связаны между собой большим количеством переходов заданной интенсивности, которые осуществляются с заданными вероятностями. Графически это представляется с помощью графа состояний и переходов, и предметом исследования в таком графе есть вероятности нахождения системы в том или ином состоянии.

Проанализированы имеющиеся в литературе методы исследования динамических характеристик графов с помощью систем дифференциальных уравнений, решают приближенными методами. Для точного решения системы дифференциальных уравнений предлагается использование операционного исчисления. Метод применен для описания процесса восстановления транспортного потока военной логистики. Установлены границы возможности применения результатов более простого приближенного решения.

Ключевые слова: динамические модели, системы дифференциальных уравнений, операционное исчисление, точное определение вероятностей состояний транспортного потока.

EXACT SOLUTION OF TASKS OF DYNAMIC MODELING OF PROCESSES IN SYSTEMS OF TRANSPORT LOGISTIC

O. Ugol'nikov, B. Demianchuk, N. Kolesnychenko, O. Malinovsky.

The dynamic models of processes in transport logistics systems are considered. In the literature, such complex systems as the military transport logistics system or the combat vehicle support system are often modeled as a set of typical system states. These states are interconnected by a large number of transitions of a given intensity, which are carried out with given probabilities. Graphically, this is represented using the so-called graph of states and transitions, and the probabilities of the system being in a particular state are the subject of research in such a graph.

The methods available in the literature for studying the dynamic characteristics of state graphs and transitions are analyzed. A description of the changes in probabilities as a function of time is made using systems of differential equations, usually linear. Based on practical requirements, approximate solutions to such systems are usually sought. One of the approximate methods is the decomposition method, in which, instead of a system of coupled equations, a set of independent equations is considered, the solution of which is not difficult. The results of the solution have an accuracy satisfactory from the point of view of practical use. The assumptions based on which the decomposition method can be used are analyzed. It is shown that the accuracy of the obtained results substantially depends on the given initial conditions and should increase over time, when this dependence weakens.

A method is proposed for the exact solution of a system of differential equations, free of any assumptions. The use of operational calculus is substantiated, which reduces the solution of a system of linear differential equations to the solution of a system of linear algebraic equations for unknown images of the sought-for Laplace functions. The method is used to describe the process of technical support for the restoration of the transport flow of military logistics. The boundaries of the possibility of applying the results of a simpler approximate solution are established.

Keywords: *dynamic models, systems of differential equations, operational calculus, exact definition of probabilities of traffic flow states.*