УДК 656.222

Ю. В. ЧИБІСОВ, Ю. С. ШУЛЬГА (Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ВАГОНІВ ПО ВАНТАЖНИМ ФРОНТАМ

В реальних задачах вибору найбільш пріоритетного рішення, що виникають на практиці, як правило, присутні кілька критеріїв оптимальності. Під багатокритеріальною задачею найчастіше розуміють не власне вербальний опис задачі, а її модель, а саме: багатокритеріальна задача – це математична модель прийняття оптимального рішення за декількома критеріями. Ці критерії можуть відображати оцінки різних якостей об'єкта або процесу, з приводу яких приймається рішення.

У статті розглядаються задачі з використанням комплексного векторного критерію, за допомогою якого можна досягти максимального ефекту, при цьому необов'язково досягнення екстремуму у всіх функціях. В методах, заснованих на згортанні критеріїв, з декількох локальних критеріїв формується один. Рішення, яке отримане в результаті оптимізації такого критерію, можна вважати ефективним. Ще одним методом, який дозволяє розв'язувати багатокритеріальні задачі та отримувати при цьому ефективне рішення, є метод послідовних поступок. До недоліків методу можна віднести такі: малому приросту коефіцієнтів відповідає великий приріст функції, тобто рішення задачі не є стійким; необхідність визначення вагових коефіцієнтів і ступеню їх значимості (нормування критеріїв).

Таким чином, у статті виконано аналіз існуючих методів розв'язку багатокритеріальних задач оптимізації. Розглянуто задачу розподілу вагонів по вантажним фронтам залізничної станції у багатокритеріальній постановці. Виконано порівняння рішень, отриманих різними методами. Виконано аналіз недоліків та переваг кожного з розглянутих методів багатокритеріальної оптимізації.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, векторна оптимізація, цільова функція, якість рішення, критерій ефективності.

В реальных задачах выбора наиболее приоритетного решения, возникающих на практике, как правило, присутствуют несколько критериев оптимальности. Под многокритериальной задачей чаще всего понимают не собственно вербальное описание задачи, а ее модель, а именно: многокритериальная задача – это математическая модель принятия оптимального решения по нескольким критериям. Эти критерии могут отражать оценки различных качеств объекта или процесса, по поводу которых принимается решение.

В статье рассматриваются задачи с использованием комплексного векторного критерия, с помощью которого можно достичь максимального эффекта, при этом необязательно достижения экстремума во всех функциях. В методах, основанных на свертывании критериев, из нескольких локальных критериев формируется один. Решение, полученное в результате оптимизации такого критерия, можно считать эффективным. Еще одним методом, который позволяет решать многокритериальные задачи и получать при этом эффективное решение, является метод последовательных уступок. К недостаткам метода можно отнести следующие: малому приращению коэффициентов соответствует большой прирост функции, то есть решение задачи не является устойчивым; необходимость определения весовых коэффициентов и степени их значимости (нормирования критериев).

Таким образом, в статье выполнен анализ существующих методов решения многокритериальных задач оптимизации. Рассмотрена задача распределения вагонов по грузовым фронтам железнодорожной станции в многокритериальной постановке. Выполнено сравнение решений, полученных разными методами. Выполнен анализ недостатков и преимуществ каждого из рассмотренных методов многокритериальной оптимизации.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, векторная оптимизация, целевая функция, качество решения, критерий эффективности.

In actual problems of choosing the most preferred solutions that arise in practice, usually there are several optimality criteria. As a multi-criteria task it is often considered the proper verbal description of the task and its model, namely multi-criteria task is a mathematical model of optimal decision-making on several criteria. These criteria may reflect the evaluation of various properties of an object or process on which the decision is made.

The article deals with the problem of using an integrated vector criterion, with a help of which one can achieve maximum effect, without necessarily achieving the extremum in all functions. In methods based on coagulation of criteria out of several local criteria only one is formed. The decision resulting from the optimization of such a criterion can be considered effective. Another method which allows to solve the problem of multi-criteria and receive at the same time an effective solution is the method of successive concessions. The disadvantages of this method are the following: a small increment coefficient corresponds to a large increase in the function, i.e. the solution of the task is not sustainable; the need to determine the weighting factors and their relative importance (valuation criteria).

Analysis of existing methods for solving the multi-criteria optimization tasks is made. The distribution of wagons at freight fronts of a railway station in the multi-criteria formulation is considered. Comparison of solutions obtained by different methods is made. Analysis of the advantages and disadvantages each of the above methods of multi-criteria optimization is made.

Keywords: multi-criteria optimization, vector optimization, the objective function, the quality of solution, efficiency criterion.

Вступ

У зв'язку з впровадженням передових технологій та розвитком інтелектуальних систем підтримки управлінських рішень у всі сфери транспортних підприємств, все більшої актуальності набувають багатокритеріальні задачі оптимізації. Сучасний математичний апарат дозволяє вирішувати задачі оптимізації при двох та більше критеріях. В реальних задачах вибору найбільш пріоритетного рішення, що виникають на практиці, як правило, присутні кілька критеріїв оптимальності. У зв'язку з цим, питання вирішення багатокритеріальних задач оптимізації, а також розробка математичних алгоритмів, які дозволяють приймати науково обґрунтоване управлінське рішення, є досить актуальними для залізничного транспорту України.

Аналіз досліджень та публікацій

Завдання вибору деякого рішення з множини допустимих рішень з урахуванням декількох критеріїв оптимальності розглядалося в багатьох роботах [1–7].

Під багатокритеріальною задачею найчастіше розуміють не власне вербальний опис задачі, а її модель, а саме: багатокритеріальна задача – це математична модель прийняття оптимального рішення за декількома критеріями. Ці критерії можуть відображати оцінки різних якостей об'єкта або процесу, з приводу яких приймається рішення.

Формально багатокритеріальна задача як модель задається у вигляді:

$$\begin{cases} F(x) \to \max \\ x \in D \end{cases}, \qquad (1)$$

де D – множина допустимих рішень;

F(x) – векторна функція аргументу x, яку можна представити у такому вигляді:

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)\}, \qquad (2)$$

де $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ – скалярні функції векторного аргументу x, кожна з яких є математичним виразом одного критерію оптимальності.

Так як в даній моделі використовується векторна цільова функція, її часто називають задачею векторної оптимізації [8]. Очевидно, що задача (1) не належить до класу задач математичного програмування, тому що моделі цього класу задач завжди містять тільки одну цільову функцію векторного аргументу.

Інакше задачу (1) можна переписати у вигляді [9]:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_k(x) \end{pmatrix} \to \max \qquad (3)$$

де $x \in D$

Тут розглядається комплексний векторний критерій, за допомогою якого можна досягти максимального ефекту, при цьому необов'язково досягнення екстремуму у всіх функціях. Існування рішення, яке буквально максимізує всі цільові функції, є рідкісним винятком.

Задача векторної оптимізації в загальному випадку не має чіткого математичного рішення. Для отримання того чи іншого її вирішення необхідно використовувати додаткову суб'єктивну інформацію фахівця в даній предметній області, якого прийнято називати особою, що приймає рішення (англ. decisionmaker). Це означає, що при вирішенні задачі різними фахівцями із залученням різних джерел інформації, скоріше всього будуть отримані різні відповіді.

Задачі векторної оптимізації в даний час прийнято розглядати в рамках теорії прийняття рішень [10], основною особливістю задач якої є наявність невизначеності. Ця невизначеність не може бути виключена за допомогою різних прийомів моделювання та об'єктивних розрахунків. В багатокритеріальних задачах невизначеність полягає в тому, що невідомо, яким критерієм віддати перевагу і в якій мірі. Для усунення цієї невизначеності необхідно, по-перше: сформулювати спеціальний принцип оптимальності, по-друге: залучити додаткову суб'єктивну інформацію особи, що приймає рішення, засновану на її досвіді та інтуїції.

Нехай x_1 та x_2 допустимі розв'язки задачі (3). Кажуть, що x_1 краще рішення в порівнянні з x_2, якщо $f_i(x_1) \geq f_i(x_2),\ \forall i = \overline{1,k}$, при чому існує i_0 такий, що $f_i(x_1) > f_i(x_2)$. Іншими словами, будемо вважати, що рішення x_1 краще в порівнянні з рішенням x_2, якщо воно не гірше x_2 по всіх розглянутих критеріях, причому серед всіх критеріїв є хоча б один критерій з номером i_0, для якого рішення x_1 краще, ніж x_2.

Отже, деякий розв'язок x^* задачі (3) називається ефективним рішенням даної задачі, якщо для нього не існує більш кращих розв'язків. Інакше можна сказати, що ефективним рішенням називається таке рішення x^*, яке не можна поліпшити по якомусь із критеріїв, не погіршивши при цьому значення інших критеріїв [9].

Множина ефективних рішень називається множиною Парето і позначається $P(D)$. Очевидно, множина Парето є підмножиною множини допустимих рішень D, яка, в свою чергу, належить n-вимірному векторному простору E, тобто $P(D) \subset D \subset E^n$, дивись рис. 1.

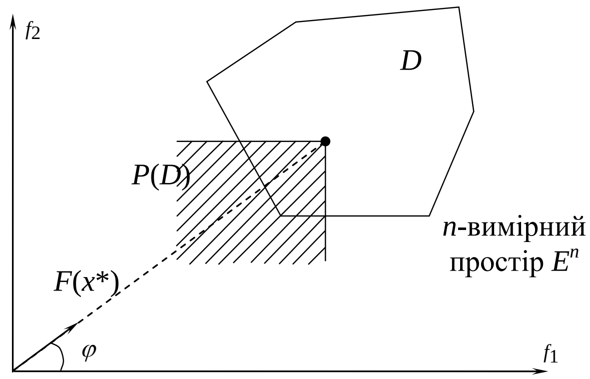

Рис. 1. Геометрична інтерпретація умови $P(D) \subset D \subset E^n$

Вектор значень критеріїв, обчислених для ефективного розв'язку $F(x^*)$, називається ефективної оцінкою. Сукупність усіх ефективних оцінок, тобто образ множини Парето в просторі критеріїв, називається множиною ефективних оцінок і, як правило, позначається як $F(P)$. Множина ефективних оцінок є підмножиною множини допустимих рішень в просторі критеріїв $F(D)$, яка, в свою чергу, є підмножиною k-вимірного векторного простору, тобто $F(P) \subset F(D) \subset E^k$. Тобто можна сказати, що множині Парето P, яка належить множині допустимих рішень D, за допомогою векторної функції F можна зіставити множину ефективних оцінок $F(P)$.

Сенс введеного поняття ефективного рішення полягає в тому, що оптимальне рішення слід шукати лише серед елементів множини Парето – множини $P(D)$. В іншому випадку завжди знайдеться точка x, що виявляється кращою, незалежно від розстановки пріоритетів важливості окремих критеріїв. У множині Парето існує поняття узгодженого оптимуму, при якому при якому жодний з можливих розв'язків неможна покращити за якимось критерієм, не погіршивши при цьому інший.

Множина розв'язків за Парето дозволяє звузити клас можливих претендентів на остаточне рішення і виключити з розгляду завідомо неконкурентоспроможні варіанти. А остаточний вибір здійснюється на основі додаткової інформації про перевагу особи, що приймає рішення.

Недолік принципу Парето в тому, що він пропонує в якості розв'язку множину рішень, що не завжди прийнятно. Для того, щоб вибрати з цієї множини єдине рішення потрібна якась додаткова інформація, припущення, домовленість про те, що ж вважати найкращим рішенням.

Тому потрібні якісь додаткові процедури для відшукання якогось єдиного представника з множини Парето. Специфіка розв'язку таких завдань полягає в тому, що сам вибір такої процедури, методу знаходження остаточного рішення в якійсь мірі заснований на припущеннях особи, що приймає рішення, тобто на суб'єктивній інформації.

Методи вирішення задач багатокритеріальної оптимізації можна поділити на чотири групи:

– методи, засновані на згортанні критеріїв;

– методи, які використовують обмеження на критерії;

– методи цільового програмування;

– методи, засновані на знаходженні компромісного рішення.

Замість вихідної багатокритеріальної задачі відповідно до обраного методу, формується задача що її заміщає. До складу такої задачі входить один критерій, а до вихідної системи обмежень додається одне або декілька додаткових обмежень. Розв'язок такої задачі називається субоптимальним.

Розглянемо деякі з вищезазначених методів розв'язку багатокритеріальних задач. В методах, заснованих на згортанні критеріїв, з декількох локальних критеріїв формується один. Процедура згортання критеріїв така.

Нехай заданий вектор вагових коефіцієнтів критеріїв $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_n)$, що характеризують важливість відповідного критерію $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geq 0,\ k = \overline{1, K} \cdot$

Лінійна функція в такому випадку буде являти собою суму критеріїв, помножених на вагові коефіцієнти. Задача математичного програмування зводиться до однокритеріальної і приймає такий вигляд:

$$F' = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k f_k(x) \to \max \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geq 0,\ k = \overline{1, K},\ x \in D$$

Рішення, яке отримане в результаті оптимізації такого критерію, можна вважати ефективним.

До недоліків методу можна віднести такі:

1) малому приросту коефіцієнтів відповідає великий приріст функції, тобто рішення задачі не є стійким;

2) необхідність визначення вагових коефіцієнтів і ступеню їх значимості (нормування критеріїв).

Ще одним методом, який дозволяє розв'язувати багатокритеріальні задачі та отримувати при цьому ефективне рішення, є метод послідовних поступок. Алгоритм цього методу такий.

1. Критерії нумеруються в порядку зменшення важливості.

2. Розв'язується задача для першої цільової функції

$$f_1(x) \to \max \qquad (5)$$
$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \in D \end{cases}$$

та визначається ефективне рішення f_1^*.

3. Встановлюється припустима поступка Δ_1 по цьому критерію.

4. Розв'язується задача для другої цільової функції з відповідним додатковим обмеженням:

$$f_1(x) \to \max$$
$$\begin{cases} f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1, \\ x \geq 0, \\ x \in D \end{cases} \qquad (6)$$

Якщо в задачі більше двох критеріїв, то пункти 3 та 4 повторюються для $f_2(x), .. f_k(x)$.

Приклад вирішення задачі багатокритеріальної оптимізації

Розглянемо задачу розподілу вагонів по вантажним фронтам залізничної станції, яка, зазвичай, вирішується методами лінійного програмування, у багатокритеріальній постановці.

До вантажної станції прибуває $m = 50$ ваг, які необхідно вивантажити впродовж доби на трьох вантажних фронтах місткістю відповідно $m_1 = 25$ ваг, $m_2 = 28$ ваг, $m_3 = 20$ ваг.

Через різне технічне обладнання вантажних фронтів витрати залізниці пов'язані з вивантаженням вагонів на них, різні і складають $C_1 = 20$ у.о./ваг, $C_2 = 30$ у.о./ваг, $C_3 = 35$ у.о./ваг.

Плата клієнтів за вивантаження вантажів складає $П_1 = 60$ у.о./ваг, $П_2 = 55$ у.о./ваг, $П_3 = 45$ у.о./ваг.

Необхідно знайти ефективне рішення, яке забезпечує мінімум витрат залізниці та клієнтів при виваженні вагонів.

При формалізації задачі в якості змінних обираємо кількість вагонів, які розвантажуються на вантажних фронтах: x_1 – на першому фронті, x_2 – на другому фронті, x_3 – на третьому фронті. Тоді отримаємо дві цільові функції, які матимуть такий вигляд:

$C = 20x_1+30x_2+35x_3 \to \min;$

$П = 60x_1+55x_2+45x_3 \to \min.$

Задача має такі обмеження:

– по загальній кількості вагонів, які розвантажуються:

$x_1 + x_2 + x_3 = 50;$

– по місткості вантажних фронтів:

$x_1 \leq 25;\ x_2 \leq 28;\ x_3 \leq 20;$

Слід також зазначити, що кількість вагонів не може бути від'ємним числом:

$x_i \geq 0.$

Таким чином, задача розподілу вагонів по вантажним фронтам матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50; \\ x_1 \le 25; \\ x_2 \le 28; \\ x_3 \le 20; \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

$$C = 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 \to \min \qquad (7)$$

$$П = 60x_1 + 55x_2 + 45x_3 \to \min$$

Або при використанні єдиного векторного критерію оптимізації:

$$\begin{pmatrix} C = 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 \\ П = 60x_1 + 55x_2 + 45x_3 \end{pmatrix} \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50; \\ x_1 \le 25; \\ x_2 \le 28; \\ x_3 \le 20; \\ x_i \ge 0. \end{cases} \qquad (8)$$

У такій постановці завдання пошуку таких значень кількості вагонів, які забезпечують мінімальне значення єдиного векторного критерію, зводиться до задачі векторної оптимізації [8].

Уся множина допустимих рішень, яка отримана повним перебором варіантів, представлена у векторній площині на рис. 2.

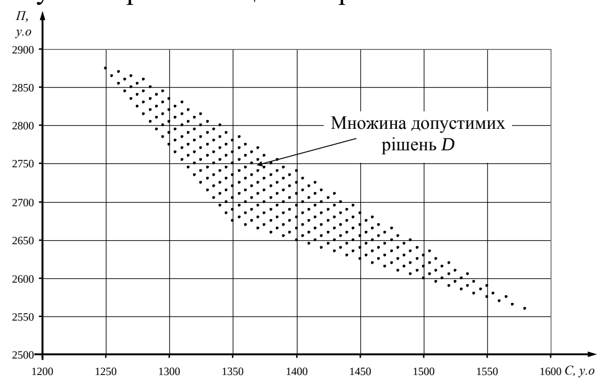

Рис. 2. Множина допустимих рішень у векторній площині

Таким чином, на рис. 2 представлена множина, яка складається з 294 можливих допустимих варіантів розв'язку задачі (8). Ця множина є підмножиною множини усіх можливих рішень.

Графічно задачу можна розв'язати таким чином. Обираємо будь-яку точку на площині з множини допустимих рішень. Нехай це буде точка x_{ij} (див. рис. 3) та направляємо її в тому ж напрямку, що й цільову функцію. Тобто, якщо цільова функція направлена до мінімуму, то й пошук оптимального рішення необхідно здійснювати в напрямку мінімальних значень.

У випадку, якщо до множини $P(D)$ попадають ще якісь точки x_{mn}, то розв'язок x_{ij} не є оптимальним; існують інші розв'язки, які кращі за x_{ij}. Отже, серед множини допустимих рішень необхідно обрати таку підмножину, кожен розв'язок якої неможливо покращити, не погіршивши при цьому один із компонентів векторного критерію. Таку підмножину називають множиною Парето. А варіанти рішення називають незрівняними за Парето, тому що поліпшення якості рішення з одним локальним критеріям призводить до погіршення якості рішення з іншим. Множина ефективних рішень Парето для задачі, яка розглядається, наведена на рис. 4.

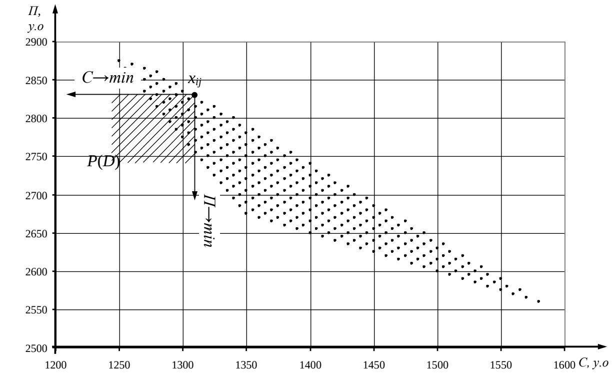

Рис. 3. Пошук оптимального за Парето рішення

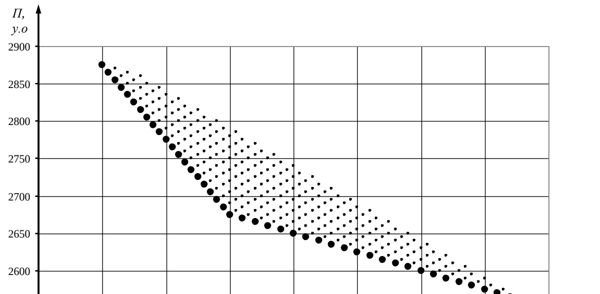

Рис. 4. Множина ефективних за Парето рішень

При цьому, крайня ліва точка з множини Парето відповідає рішенню, для якого витрати залізниці є мінімальними, а крайня права точка – рішенню, для якого витрати клієнтів є мінімальними.

Усі ефективні варіанти множини Парето наведено у табл. 1.

Таким чином, рішення даної задачі дозволяє значно скоротити число усіх можливих варіантів розв'язку та допомогти серед незрівнянних за Парето варіантів, обрати той, який влаштовує особу, що приймає рішення. Але, нажаль, така постановка не дає однозначного об'єктивного рішення.

Вирішимо поставлену задачу за допомого розглянутих вище методів. Для цього необхідно привести її до основної задачі лінійного програмування.

Таблиця 1

Множина ефективних за Парето рішень

№	x_1	x_2	x_3	C	$П$	№	x_1	x_2	x_3	C	$П$
1	25	5	20	1 350	2 675	23	23	7	20	1 370	2 665
2	25	6	19	1 345	2 685	24	22	8	20	1 380	2 660
3	25	7	18	1 340	2 695	25	21	9	20	1 390	2 655
4	25	8	17	1 335	2 705	26	20	10	20	1 400	2 650
5	25	9	16	1 330	2 715	27	19	11	20	1 410	2 645
6	25	10	15	1 325	2 725	28	18	12	20	1 420	2 640
7	25	11	14	1 320	2 735	29	17	13	20	1 430	2 635
8	25	12	13	1 315	2 745	30	16	14	20	1 440	2 630
9	25	13	12	1 310	2 755	31	15	15	20	1 450	2 625
10	25	14	11	1 305	2 765	32	14	16	20	1 460	2 620
11	25	15	10	1 300	2 775	33	13	17	20	1 470	2 615
12	25	16	9	1 295	2 785	34	12	18	20	1 480	2 610
13	25	17	8	1 290	2 795	35	11	19	20	1 490	2 605
14	25	18	7	1 285	2 805	36	10	20	20	1 500	2 600
15	25	19	6	1 280	2 815	37	9	21	20	1 510	2 595
16	25	20	5	1 275	2 825	38	8	22	20	1 520	2 590
17	25	21	4	1 270	2 835	39	7	23	20	1 530	2 585
18	25	22	3	1 265	2 845	40	6	24	20	1 540	2 580
19	25	23	2	1 260	2 855	41	5	25	20	1 550	2 575
20	25	24	1	1 255	2 865	42	4	26	20	1 560	2 570
21	25	25	0	1 250	2 875	43	3	27	20	1 570	2 565
22	24	6	20	1 360	2 670	44	2	28	20	1 580	2 560

Вводимо додаткові змінні: y_1, y_2, y_3 (відповідно резерви місткості 1-го, 2-го та 3-го вантажних фронтів), щоб перетворити нерівності на рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50; \\ x_1 + y_1 = 25; \\ x_2 + y_2 = 28; \\ x_3 + y_3 = 20; \end{cases}$$
$$C = 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 \to \min \quad (9)$$
$$П = 60x_1 + 55x_2 + 45x_3 \to \min$$

За допомогою симплекс методу вирішуємо задачу для першого критерію ($C \to \min$). Отримаємо такий розв'язок (1):

$x_1 = 25$ ваг, $x_2 = 25$ ваг, $x_3 = 0$ ваг.

Витрати залізниці складатимуть $C^* = 1250$ у.о.

Витрати клієнтів складатимуть $П^* = 2875$ у.о.

За допомогою симплекс методу вирішуємо задачу для другого критерію ($П \to \min$). Отримаємо такий розв'язок (2):

$x_1 = 2$ ваг, $x_2 = 28$ ваг, $x_3 = 20$ ваг.

Витрати клієнтів складатимуть $П^* = 2560$ у.о.

Витрати залізниці складатимуть $C^* = 1580$ у.о.

Отже отримано 2 граничних рішення, при чому обидва вони є ефективними.

Таким чином, отримаємо лінійну залежність витрат клієнтів на розвантаження вантажу від витрат залізниці, яка наведена на рис. 5.

Ця залежність демонструє, яким чином змінюються витрати C та $П$, але також не дає однозначного рішення. Крім того, в порівнянні з попереднім рішенням (рис. 4), було втрачено 42 можливих ефективних розв'язки задачі.

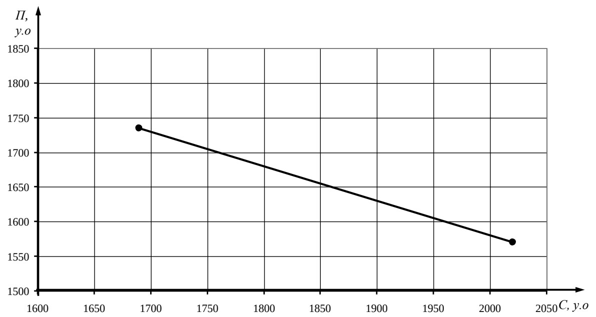

Рис. 5. Лінійна залежність витрат клієнтів від витрат залізниці

Виконаємо розв'язок задачі за допомогою *методу згортки критеріїв*.

Для прикладу припустимо, що критерії *С* та *П* рівні за значенням, тобто α_1=0,5 та α_2=0,5.

Таким чином, замість системи (9) отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50; \\ x_1 + y_1 = 25; \\ x_2 + y_2 = 28; \\ x_3 + y_3 = 20; \end{cases}$$
$$C = 0,5(20x_1 + 30x_2 + 35x_3) \to \min \qquad (10)$$
$$П = 0,5(60x_1 + 55x_2 + 45x_3) \to \min$$

Або після згортки критеріїв:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50; \\ x_1 + y_1 = 25; \\ x_2 + y_2 = 28; \\ x_3 + y_3 = 20; \end{cases} \qquad (11)$$
$$СП = 40x_1 + 42,5x_2 + 40x_3 \to \min$$

За допомогою симплекс методу вирішуємо задачу для загального критерію (*СП*→min). Отримаємо такий розв'язок (3):

x_1 = 25 ваг, x_2 = 5 ваг, x_3 =20 ваг.

Витрати залізниці складатимуть *С** = 1350 у.о.

Витрати клієнтів складатимуть *П** = 2675 у.о.

Тепер виконаємо розв'язок задачі за допомогою *методу послідовних поступок*.

При вирішенні задачі симплекс-методом для першого критерію ($C \to \min$) було отримано ефективний розв'язок, при якому *С** = 1250 у.о. Приймаємо максимальну величину поступки по цьому критерію Δ_1 = 20 % та вирішуємо задачу у відповідності до алгоритму. Для цього вводимо додаткове обмеження $C \le C^* + \Delta_1$, де C^* = 1250 у.о., а Δ_1 = 0,2 · 1250 = 250 у.о. Тоді:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50; \\ x_1 + y_1 = 25; \\ x_2 + y_2 = 28; \\ x_3 + y_3 = 20; \\ C \le C^* + \Delta_1 \end{cases} \qquad (12)$$
$$П' = 60x_1 + 55x_2 + 45x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50; \\ x_1 + y_1 = 25; \\ x_2 + y_2 = 28; \\ x_3 + y_3 = 20; \\ 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 \le 1500 \end{cases} \qquad (13)$$
$$П' = 60x_1 + 55x_2 + 45x_3 \to \min$$

За допомогою симплекс методу вирішуємо задачу для другого критерію (*П*→min) при додатковому обмеженні $C \le C^* + \Delta_1$. Отримаємо такий розв'язок (4):

x_1 = 10 ваг, x_2 = 20 ваг, x_3 =20 ваг.

Витрати клієнтів складатимуть *П** = 2600 у.о.

Витрати залізниці складатимуть *С** = 1500 у.о.

Покажемо усі отримані розв'язки на графічній інтерпретації задачі, див. рис. 6, або у векторній площині, див. рис. 7.

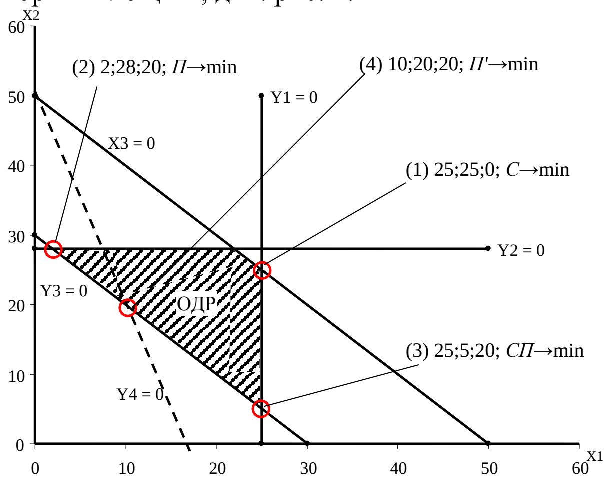

Рис. 6. Графічна інтерпретація розв'язку задачі

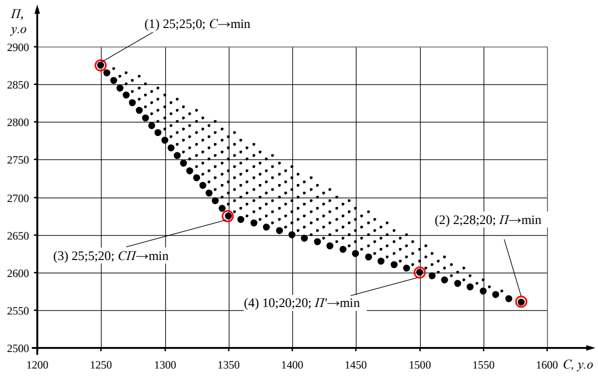

Рис. 7. Множина ефективних за Парето рішень з варіантами розв'язків

Висновки

Розглянуті методи рішення задач багатокритеріальної оптимізації мають свої переваги та недоліки.

1. Векторна оптимізація як частковий випадок багатокритеріальної оптимізації дозволяє знайти таку область компромісів, до якої входить підмножина допустимих ефективних розв'язків, які є незрівняними за Парето. Таку підмножину можна знайти геометрично у векторній площині. Таким чином, рішення задачі векторної оптимізації дозволяє значно скоротити число усіх можливих варіантів розв'язку та допомогти серед незрівнянних за Парето варіантів, обрати той, який влаштовує особу, що приймає рішення. Але, нажаль, така постановка не дає однозначного об'єктивного рішення.

2. Задачі багатокритеріальної оптимізації можна розв'язувати з використанням відомих методів лінійного програмування, наприклад симплекс-методу, отримуючи при цьому деяке ефективне рішення. Але таке рішення не є оптимальним за комплексним критерієм, тому потребує подальшого уточнення.

3. З використанням методу згортки критеріїв можна отримати єдине ефективне і, водночас, оптимальне рішення, яке звужує область компромісів Парето до одного єдиного розв'язку. Але слід пам'ятати, що таке рішення отримано за допомогою нормування критеріїв, тобто за допомогою суб'єктивної інформації.

4. З використанням методу послідовних поступок також можна отримати єдине ефективне рішення, але таке рішення буде результатом заздалегідь визначеної похибки.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Задоров, В. Б. Застосування методів багатокритеріальної оптимізації до планування вантажних перевезень [Текст] / В. Б. Задоров, Е. В. Федусенко, А. О. Федусенко // Управління розвитком складних систем : Зб. наук. праць КНУБА. – Київ: КНУБА, 2010. – Вип. 2. – С. 6-11.

2. Чибісов, Ю. В. Математична модель вибору раціональних варіантів пропуску поїздопотоків по залізничній мережі [Текст] / Ю. В. Чибісов, Г. Я. Мозолевич // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – № 3/11 (57). – С. 37-41.

3. Чибісов, Ю. В. Вибір раціональних варіантів пропуску поїздопотоку по паралельних залізничних лініях за економічним критерієм [Текст] / Ю. В. Чибісов // Вісник Нац. техн. ун-ту «Харківського політехнічного інституту». – Харків: Вид-во техн. ун-ту ХПІ, 2012. – Вип. 68. – С. 151–155.

4. Чибісов, Ю. В. Формування раціональних потоків поїздів на мережі залізниць [Текст] / Ю. В. Чибісов // Вісник Нац.о техн. ун-ту «Харківського політехнічного інституту». – Харків: Вид-во техн. ун-ту ХПІ, 2013. – Вип. 56. – С. 66–76.

5. Божанова, Т. А. Про узагальнені розв’язки однієї задачі векторної оптимізації на транспортних мережах [Електр. ресур] / Т. А. Божанова, П. І. Когут // Динамические системы: зб. наук. праць. – 2010. – Вип. 28. – С. 48-62. – Режим доступа : http://ww.dynsys.crimea.edu/issue/28/dynsys_28_bozhanova.pdf

6. D’Apice, C. Efficient Controls for Traffic Flow on Networks / C. D’Apice, P. I. Kogut, R. Manzo // Dynamical and Control Systems. – 16(2010). – № 3. – P. 407-437.

7. Jahn J. Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. – Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 400 p.

8. Босов, А. А. Векторная оптимизация по двум показателям [Текст] / А. А. Босов, Г. Н. Кодола, Л. Н. Савченко // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – № 17. – С. 134-138.

9. Постановка задачи векторной оптимизации [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://edu.nstu.ru/courses/mo_tpr/files/5.html.

10. Семенова, Н. В. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок [Текст] / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н. Нагорная // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158-172.

Стаття рекомендована до публікації к.т.н., доц. Яновським П.О. (Україна)

Надійшла до редколегії 18.11.2014.
Прийнята до друку 19.11.2014.