

## Прагматические модели взаимодействия пневматической шины с опорной поверхностью и их применение

Представлены известные и новая (являющаяся модернизацией известных) математические модели поперечной силы трения при нестационарном уводе шины в условиях умеренного и значительного трения. Показано применение новой модели для решения модельной задачи колебаний пневмоколесной машины, колеса которой несбалансированны. Результаты моделирования сопоставлены с результатами моделирования для упрощенной модели шины.

**пневматическая шина, модель, колебания, трение, пневмоколесная, машина, дифференциальное уравнение**

**1. Вступление.** Проблемы безопасности и комфортабельности движения, а также ресурса пневмоколесных машин (автомобилей, автопоездов, мотоциклов, движущихся по взлетно-посадочной полосе самолетов) требуют тщательного изучения динамики качения колес, снаряженных пневматическими шинами. (Упрощая, упомянутые колеса будем именовать *шинами*). Важность и сложность названной задачи обусловили рождение и бурное развитие подотрасли механики - механики шин. Наиболее сложно построить физико-математическую модель шины, описывающую неустановившиеся движения. Кроме прочего, модель должна быть удобной для применения, как составной части общей математической модели движения пневмоколесной машины (ПКМ). Одним из направлений решения такой задачи является создание так называемых *прагматических* моделей шины. К ним следует отнести модель «струна» [1,2]; модели, основанные на уравнении баланса упругих и контактных сил на шине [3-5]; модели, включающие элементы с релаксацией [6,7]; дискретную модель шины [8].

В настоящей работе:

- дано краткое описание выходных данных основной модели установившегося увода шины [9,10] и некоторых из вышеперечисленных прагматических моделей неустановившихся движений;
- произведено сопоставление прагматических моделей между собой и с экспериментальными данными;
- предложена математическая модель для нахождения поперечной силы трения, если центр масс шины движется заданным образом в направлении оси качения;
- на примере модельной задачи рассмотрено применение предложенной модели для изучения колебаний ПКМ.

**2. Постановка задачи и выходные данные теории чистого установившегося увода.** На рис. 1 показана катящаяся шина. Точка  $C$  есть ее центр масс. При наличии внешней силы, приложенной в точке  $C$  и направленной вдоль оси качения  $Cz$ , шина катится *косо*, т.е. образуется угол  $U$  (угол увода) между плоскостью верхней части колеса и вектором путевой скорости центра масс. При этом в зоне контакта шины с опорной поверхностью (далее просто *зона контакта*) появляется поперечная сила трения  $F$ , направленная противоположно действию внешней силы. Сила  $F$  оказывается приложенной не в центре зоны контакта и потому создается момент сил трения вокруг

оси  $C\eta$ , который называют восстанавливающим моментом  $M$ . Если в процессе движения величины  $U, F, M$  не зависят от времени, то движение называют установившемся. Своей задачей считаем рассмотрение прагматических моделей шины и их применение при заданном смещении центра масс в направлении оси  $C\zeta$ ; такие движения шины будем называть поперечными.

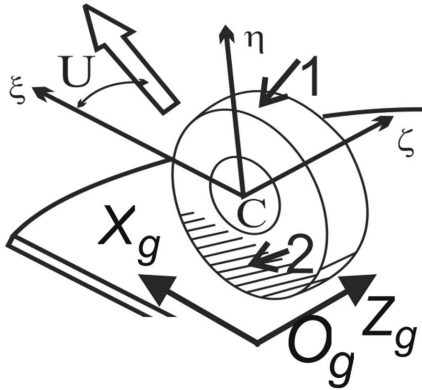


Рисунок 1 - Увод колеса с пневматической шиной

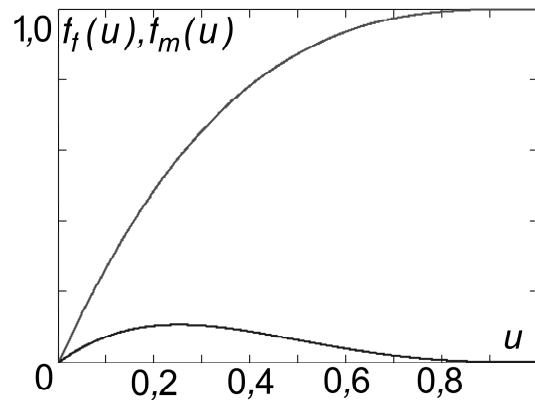


Рисунок 2 - Характеристики трения

Для удобства и полноты изложения приведем выходные данные основной теории установившегося чистого увода [9,10]. (Увод является *чистым* при отсутствии в зоне контакта продольных сил трения). Зона контакта включает два участка – участок адгезии, прилегающий к передней кромке, и участок скольжения. По мере увеличения угла увода участок адгезии уменьшается и при  $U \geq U_{cr}$  исчезает полностью. (Если нет уточненных данных для рассматриваемой шины, то величину критического угла увода  $U_{cr}$  рекомендовано назначать равной  $\approx 10^\circ$  [9]). Введем в рассмотрение относительный угол увода

$$u = U / U_{cr} .$$

Тогда [9-11]:

$$\left. \begin{aligned} F &= \mu_* N f_f(u), u \in [0;1], \\ M &= \mu_* N h f_m(u), u \in [0;1], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\mu_* = const$  – кулонов коэффициент трения;

$N$  – нормальная реакция опорной поверхности;

$h$  – полудлина зоны контакта;

$f_f(u), f_m(u)$  – безразмерные функции или *характеристики трения*:

$$\left. \begin{aligned} f_f(u) &= u(3 - 3u + u^2), \\ f_m(u) &= u(1 - 3u + 3u^2 - u^3) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

На рис. 2 сверху приведен график функции  $f_f(u)$ , внизу -  $f_m(u)$ . Вблизи нулевого угла увода справедлива зависимость:

$$F = K_{yв} U , \quad (3)$$

где  $K_{yв} = const$  – постоянная шины, именуемая коэффициентом увода и определяемая в условиях установившегося движения. Сопоставление первого из выражений (1) и только что записанного выражения (3) приводит к равенству:

$$K_{yв} = \frac{\mu_* N}{U_{cr}} \cdot f'_0, \quad (4)$$

где  $f'_0 = \frac{df_f}{du} \Big|_{u=0} = 3$ .

### 3. Движения вблизи нулевого угла увода.

**3.1. Дискретная модель шины.** Рассмотрим шину как механическую систему двух тел – большого (1) и малого (2), рис. 3 [12].

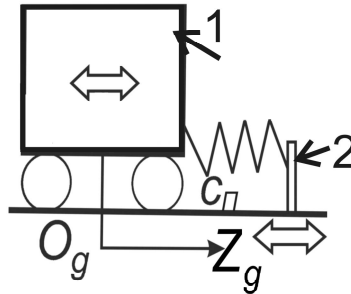


Рисунок 3 - Дискретная модель шины

Малым телом назовем малую по массе и геометрии часть шины, непосредственно прилегающую к опорной поверхности, и, претерпевающую поперечную деформацию  $\Delta\zeta$  (рис. 1). На рис. 1 эта часть шины заштрихована. Остальную часть колеса считаем большим телом. Оба тела соединены линейной упругой связью, допускающей их относительные поперечные смещения. Жесткость этой связи обозначим  $c_n$ ; ее называют боковой жесткостью шины. Массы тел механической системы обозначим  $m_2$  и  $m_1$ . Понятно, что  $m_1 \gg m_2$ . Координаты центров масс большого и малого тел вдоль неподвижной (связанной с опорной поверхностью) оси, направленной параллельно оси качения  $C\zeta$ , обозначим  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно. Продольную скорость обоих тел системы обозначим  $V$  (эта скорость направлена перпендикулярно рис. 3); поперечные скорости обоих тел системы и ее центра масс равны  $dZ_i / dt, i = 1, 2$  и  $dZ_C / dt$ , где

$$Z_i = Z_i(t), i = 1, 2; Z_C = Z_C(t),$$

$t$  – время в секундах.

Остановимся на рассмотрении движения при условии, что

$$Z_1(t) = Z_0 \sin \Omega t, \quad V = \text{const} = V_0, \quad (5)$$

где  $Z_0 = \text{const}$  – амплитуда и  $\Omega = \text{const}$  – частота вынужденных колебаний тела (1);

$V_0$  – постоянная продольная скорость колеса.

Запишем уравнение поперечного движения малого тела для этого случая:

$$m_2 \frac{d^2 Z_2}{dt^2} + c_n (Z_2 - Z_0 \sin \Omega t) = -F. \quad (6)$$

Силу трения представим в виде (3), где угол увода

$$U = \frac{dZ_2 / dt}{V_0}. \quad (7)$$

В итоге уравнение (6) примет вид обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функции  $Z_2(t)$ . Продифференцировав его по времени, и, учтя (3) и (7), придем к уравнению относительно искомой функции  $F(t)$ :

$$\omega^{-2} \left( \frac{1}{K_\Omega} \right) \frac{d^2 F}{dt^2} + \left( \frac{1}{\Omega} \right) \left( \frac{dF}{dt} \right) + \left( \frac{1}{K_\Omega} \right) F = c_n Z_0 \cos \Omega t, \quad (8)$$

где  $\omega^{-2} = m_2 / c_n$ ,  $K_\Omega = K_{y\sigma} \Omega / (c_n V_0)$ .

Решение уравнения (8) будем искать в виде

$$F = c_n Z_0 A_1 \sin(\Omega t + \beta_1), \quad (9)$$

где  $A_1 = const$  – безразмерная амплитуда поперечной силы трения;

$\beta_1 = const$  – угол сдвига фаз силы и смещения центра масс диска.

Найдем

$$A_1 = \frac{K_\Omega}{\sqrt{K_\Omega^2 + [1 - (\bar{\Omega}/\bar{\omega})^2]}}, \quad \text{tg } \beta_1 = \frac{1 - (\bar{\Omega}/\bar{\omega})^2}{K_\Omega}, \quad (10)$$

где  $D$  – диаметр колеса;

$\bar{\omega} = \omega D / V_0$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega D / V_0$  – приведенные частоты собственных и вынужденных колебаний.

Сделаем важное замечание: в формулах (6) и (8)-(10) массу тела (2) следует устремить к нулю,

$$m_2 \rightarrow 0, \quad (11)$$

а массу  $m_1$  положить равной

$$m_1 = m_\Sigma - m_2,$$

где  $m_\Sigma$  – масса снаряженного колеса.

Заметим, элементы с нулевыми массами находят применение в механических системах, описывающих движение технических объектов [13]. Обстоятельство (11) вызвано не только тем, что  $m_2 / m_1 \ll 1$ , но и тем, что в следствие качения колеса элементарные частицы, из которых состоит тело (2), быстро его покидают и имеют значительные продольные скорости, т.е. упомянутые частицы практически не сохраняют заданное им поперечное движение. Заметим также, с учетом (11) имеем

$$dZ_1(t) / dt = dZ_C(t) / dt.$$

Положив  $m_2 = 0$ , вместо (10) получим:

$$A_1 = K_\Omega (1 + K_\Omega^2)^{-1/2}, \quad \text{tg } \beta_1 = K_\Omega^{-1}. \quad (12)$$

На рис. 4 сплошными линиями приведены построенные по формулам (12), а также по формулам модели «струна» [2] графики зависимостей  $A_1(\bar{\Omega}), \beta_1(\bar{\Omega})$ .

Графики дискретной модели и модели «струна» практически совпали. Пунктиром приведены экспериментальные данные [2] для двух типов шин. Заметное расхождение теоретических и экспериментальных данных имеет место лишь на графиках амплитуды при «больших» значениях аргумента. С ростом скорости движения  $V$  значения приведенной частоты  $\bar{\Omega}$  стремятся к нулю. Поэтому заключим, что при «высоких» скоростях движения модель шины (6), (11) адекватна.

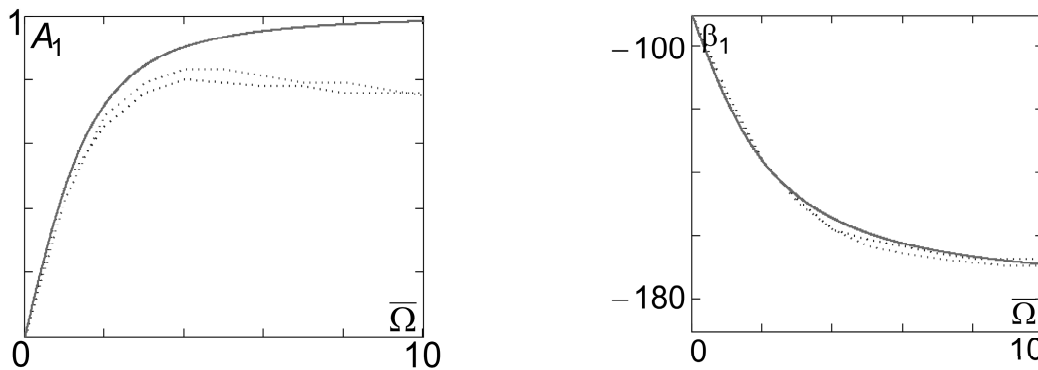


Рисунок 4 - Теоретические («струна» и дискретная модель при  $m_2 = 0$  кг) и экспериментальные ([2]) кривые

В [14] при изучении колебаний движущегося по взлетно-посадочной полосе самолета использовалось уравнение (6) и условие (11). Такой подход назовем моделью предельного перехода. С математической точки зрения использование упомянутой модели требует применения теории обыкновенных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [15].

**3.2. Шина как элемент с релаксацией.** На рис. 5 приведены точечный элемент с релаксацией (а) и обычный упруго навешенный точечный элемент, часто используемый в расчетных схемах механических колебательных систем (б). Они различаются тем, что в первом случае пружина и демпфер соединены последовательно, а во втором – параллельно.

Рассмотрим элемент с релаксацией и при этом положим

$$m = m_{\Sigma}, c = c_n, z = Z_1, z^* = Z_2, k = K_{y\phi} / V.$$

Тогда уравнения равновесия сил будут иметь вид [7]:

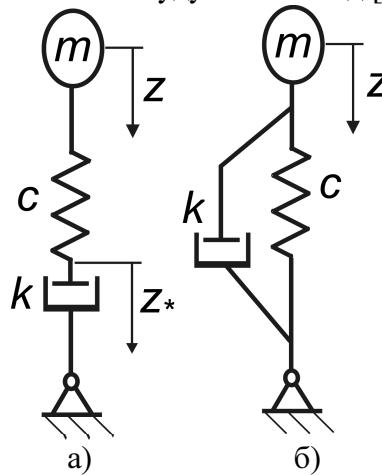


Рисунок 5 - Основные элементы расчетных схем механических колебательных систем

$$m_{\Sigma} \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = c_n (Z_2 - Z_1); \quad \frac{K_{y\phi}}{V} \cdot \frac{dZ_2}{dt} = c_n (Z_1 - Z_2).$$

Если эти уравнения рассмотреть совместно, учтя (3) и (7), то получим

$$c_n (Z_2 - Z_1) = -F = -K_{y\phi} \frac{dZ_2}{dt}. \quad (13)$$

Легко заметить, при произвольном законе  $Z_1(t)$  и условии  $m_2 = 0$  уравнения (6) и (13) совпадают. Уравнение (13) есть упомянутое во вступлении уравнение баланса упругих и контактных сил [3-5].

Снова положим

$$V = const = V_0$$

и с помощью уравнения (13) получим закон изменения поперечной силы трения  $F$ , если произошло скачкообразное изменение угла увода (рис. 6). Рассмотрим случай, когда катящаяся без увода (и соответственно при нулевой поперечной силе трения) шина в течение бесконечно малого промежутка времени перешла в режим установившегося увода с углом увода  $U_*$ . Введем обозначения:

$$F_* = K_{y\phi} U_*, \quad S_C = V_0 t, \quad K_{y\phi} / c_n = \lambda_0, \quad (14)$$

где  $F_*$  – поперечная сила трения при установившемся уводе с «небольшим» углом увода  $U_*$ ;

$S_C$  – путь, проходимый точкой  $C$  вдоль оси  $O_g X_g$  (рис. 1) за время  $t$ ;

$\lambda_0$  – длина релаксации.

Продифференцируем уравнение (13) и учтем только что введенные обозначения. Придем к дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции поперечной силы трения от пути  $F(S_C)$ :

$$\lambda_0 \frac{dF}{dS_C} + F = F_*,$$

решая которое найдем:

$$F(S_C) = F_*[1 - \exp(-S_C/\lambda_0)]. \quad (15)$$

График этой функции приведен на рис. 7. Он физически правильно описывает процесс возникновения поперечной силы трения при резком повороте колеса ПКМ.

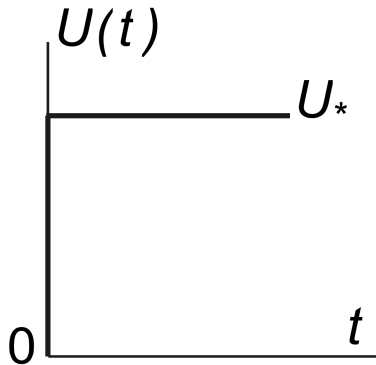


Рисунок 6 - Скачок угла увода

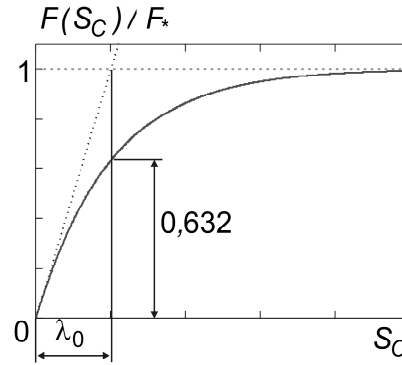


Рисунок 7 - Скачок угла увода. Поперечная сила трения

#### 4. Движения вблизи произвольного докритического угла увода.

Положим, что  $U < U_{cr}$  и заданы временные функции

$$N(t), V(t), Z_1(t) = Z_C(t). \quad (16)$$

Поперечное движение шины происходит так, что

$$\left. \begin{array}{l} u \in [0;1], \\ u \in [u_{oc} \pm \Delta u] \end{array} \right\},$$

где  $u_{oc}$  – основной относительный угол увода.

Построим математическую модель для определения функции  $F(t)$ , считая, что решена задача обращения функции  $f_f(u)$  и для рассматриваемой области изменения углов увода найдена аналитическая зависимость

$$u = \Phi(f_f). \quad (17)$$

Запишем уравнение баланса в виде:

$$c_n(Z_2 - Z_1) = -F = -\mu_* N f_f(u), \quad (18)$$

где (см. (7))  $u = (dZ_2/dt)/(VU_{cr})$ . С учетом (16) после дифференцирования уравнения (18) по времени получим

$$\mu_* c_n^{-1} \cdot \frac{d[N(t)f_f(t)]}{dt} + V(t)U_{cr} \Phi[f_f(t)] = \frac{dZ_C}{dt}. \quad (19)$$

С помощью этого уравнения можно найти функцию  $f_f(t)$  и затем – функцию  $F(t)$ . Уравнение (19) является неоднородным нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами. На рис. 8 представлена блок-схема определения поперечной силы трения на шине при использовании уравнения (19).

Сопоставим результаты математического моделирования, полученные на основе уравнения (19), с данными экспериментов. С этой целью рассмотрим динамическую реакцию шины, которая движется в режиме установившегося увода при произвольном докритическом угле увода, на скачкообразное изменение угла увода. Данные экспериментов для этого случая для различных значений основного угла увода приведены в [6].

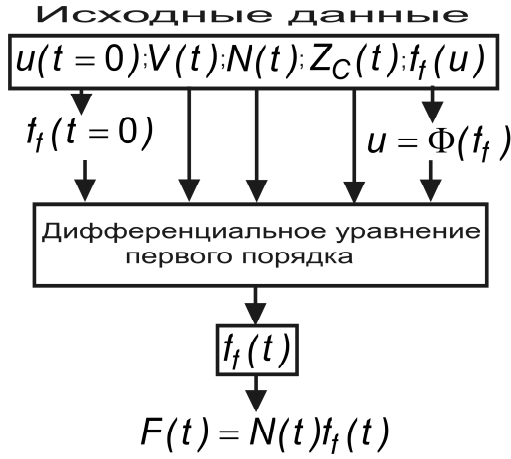


Рисунок 8 - Блок-схема определения поперечной силы на шине

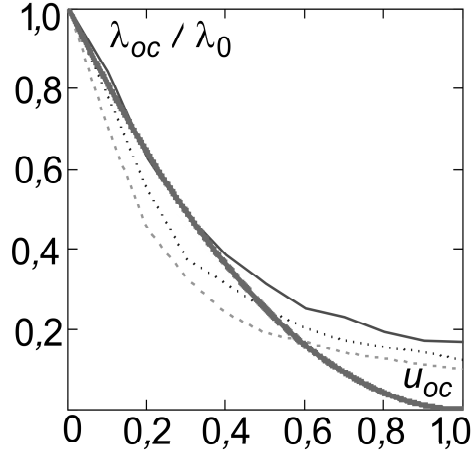


Рисунок 9 - Длина релаксации. Теоретические и экспериментальные результаты

$$N = const = N_0, V = const = V_0. \quad (20)$$

Введем обозначения:

$$f_f(u = u_{oc}) = f_{oc}; \quad \left. \frac{df_f}{du} \right|_{u=u_{oc}} = f'_{oc}; \quad u(t > 0) = const = u_*;$$

$$F(t = 0) = F_0; \quad f_f(u = u_*) = f_*; \quad F(u = u_*) = F_*.$$

Считаем, что допустимо приближение

$$f_f(u) = f_{oc} + (u - u_{oc})f'_{oc}. \quad (21)$$

Разумеется,

$$f_* = f_{oc} + (u_* - u_{oc})f'_{oc}. \quad (22)$$

С учетом первого из равенств (1), (20)-(22), а также новых обозначений после элементарных преобразований вместо (19) получим

$$f'_{oc} \left( \frac{\mu_* N_0}{c_n V_0 U_{cr}} \right) \cdot \frac{dF}{dt} + F(t) = F_*.$$

Произведем замену переменной: вместо размерного времени  $t$  будем рассматривать безразмерное смещение

$$s = S_C / \lambda_0 = (V_0 t) / \lambda_0. \quad (23)$$

Тогда, учтя (4) и последнее из равенств (14), вместо выше записанного уравнения будем иметь:

$$\left( \frac{f'_{oc}}{f'_0} \right) \cdot \frac{dF}{ds} + F(s) = F_*,$$

решая которое найдем

$$F(s) = F_0 + (F_* - F_0) \left[ 1 - \exp\left(s \cdot \frac{f'_0}{f'_{oc}}\right) \right]. \quad (24)$$

В итоге, сопоставив выражения (15) и (23), (24), найдем

$$\lambda_{oc}(u_{oc}) / \lambda_0 = f'_{oc}(u_{oc}) / f'_0, \quad (25)$$

где  $\lambda_{oc}$  – длина релаксации при движении вблизи угла увода  $u_{oc}$ . Как это видно из выражения (24), длина релаксации не зависит от соотношения величин  $F_0, F_*$  и потому всегда можно указать такую окрестность точки  $u = u_{oc}$ , что линеаризация (21) будет допустимой.

На рис. 9 жирной сплошной линией показан теоретический график, построенный на основе математической модели (19); остальные линии соответствуют замеренным величинам [6].

Об адекватности предлагаемой модели шины (уравнение (19)) говорит следующее:

- модель является обобщением апробированной модели установившегося движения [9-11];
- применение модели вблизи нулевого угла увода приводит к результатам хорошо согласующимся с экспериментальными (рис. 4);
- тестирование модели по параметру «длина релаксации» при движении вблизи произвольного основного угла увода приводит к удовлетворительным результатам (рис. 9).

**5. Применение предлагаемой модели поперечной силы трения.** На рис. 8 показана модель движения ПКМ и система неподвижных осей  $OXYZ$ .

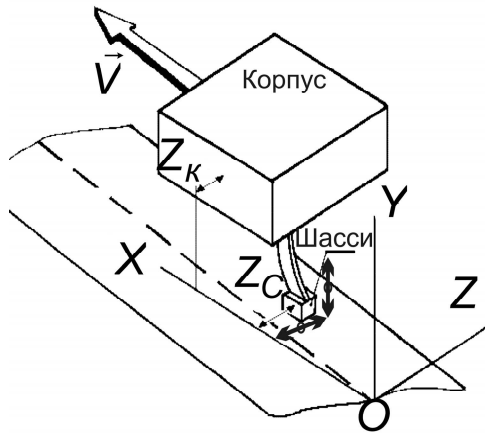


Рисунок 10 - Модель движения пневмоколесной машины

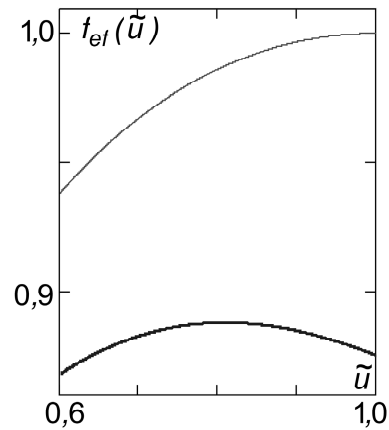


Рисунок 11 - Эффективная характеристика трения

Модель ПКМ состоит из двух упруго связанных тел - корпуса и опоры шасси. Корпус и опора шасси движутся поступательно. Жесткость упругой связи при относительном поперечном смещении тел равна  $c$ . Движение корпуса задано:

$$X_k = V_0 t, Z_k = W_0 t; V_0 = const, W_0 = const, W_0 \ll V_0,$$

где  $V_0, W_0$  – продольная и поперечная скорости корпуса. Продольная скорость опоры шасси всегда равна продольной скорости корпуса. Изучим поперечное движение опоры шасси при «больших» углах увода колес:

$$u \in [0,6;1].$$

Движение при данных углах увода происходит при умеренном скольжении шины.

Запишем уравнение поперечного движения опоры шасси:

$$M \frac{d^2 Z_C}{dt^2} + c(Z_C - W_0 t) = -F = -\mu_* N f_f(t), \quad (26)$$

где, разумеется,  $M$  – масса опоры шасси;



$Z_C$  – поперечная координата центра масс колеса, эквивалентного опоре шасси. Уравнение (26) нужно дополнить уравнением (19) и зависимостями

$$N(t), \Phi(f_f), \quad (27)$$

а также начальными условиями движения.

На основе уравнений (26), (19), доопределенных зависимостями (27), построим математическую модель изучаемых поперечных колебаний опоры шасси, переходя к безразмерному времени  $\tau$  и безразмерной скорости опоры шасси  $u_C$ :

$$\tau = \omega t, \omega = \left(\frac{c}{M}\right)^{1/2}; u_C = \frac{dZ_C / dt}{V_0 U_{cr}}. \quad (28)$$

Закон изменения нормальной реакции примем в виде:

$$N = N_0[1 - \varepsilon_N u_C(t)], 0 < \varepsilon_N \ll 1, N_0 = const. \quad (29)$$

Реализуемость закона (29) обсудим позже.

Сила трения равна

$$F = F(t) = \mu_* N(t) f_f[u(t)],$$

где допустима следующая аппроксимация функции  $f_f(u)$ :

$$f_f(u) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(u)^{1/2}\right]. \quad (30)$$

С помощью нижеприведенной таблицы можно судить о погрешности, вносимой аппроксимацией (30): во второй строке приведены значения, вычисленные по первой из формул (2), а в третьей – по формуле (30). К тому же, из таблицы следует, что нужно ограничиться значениями

$$f_f \in [0,938; 1,000].$$

$U = 0,60$	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,936	0,957	0,973	0,984	0,992	0,997	0,999	1,000	1,000
0,938	0,954	0,967	0,978	0,986	0,992	0,997	0,999	1,000

Располагая (30), находим:

$$u = \Phi(f_f) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 [\arcsin(f_f)]^2. \quad (31)$$

Приняв во внимание (19) и (26)-(31), получим следующую математическую модель колебаний опоры шасси:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_C + u_C - w_0 &= (c_n / c)[\Phi(f_f) - u_C], \\ \varepsilon_0(1 - \varepsilon_N u_C) \dot{f}_f - \varepsilon_0 \varepsilon_N \dot{u}_C f_f &= u_C - \Phi(f_f) \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

где точками сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени;

$w_0 = \frac{W_0}{V_0 U_{cr}} = const$  – безразмерная скорость корпуса;

$$\varepsilon_0 = \frac{\mu_* N_0 \omega}{c_n V_0 U_{cr}};$$

$u_C(\tau), f_f(\tau)$  – искомые функции.

Для анализа полученных результатов наряду с математической моделью (32) будем рассматривать упрощенную (*опорную*) математическую модель, к которой свернутся уравнения (32), если – как это имеет место при установившемся движении – положить

$$u(\tau) = u_C(\tau). \quad (33)$$

При требовании (33) вместо (32) получим одно дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{\tilde{u}} + \tilde{u} - w_0 = -(c_n / c)\epsilon_0 \frac{df_{ef}(\tilde{u})}{d\tilde{u}} \dot{\tilde{u}}, \quad (34)$$

где знак «тильда» введен для отличия решений изучаемой модели (32) с опорным решением;

$$f_{ef}(\tilde{u}) = (1 - \epsilon_N \tilde{u}) \sin\left[\frac{\pi}{2}(\tilde{u})^{1/2}\right] -$$

эффективная характеристика трения. На рис. 11 сверху показан график эффективной характеристики трения при  $\epsilon_N = 0$ , снизу – при  $\epsilon_N = 0,125$ .

Вернемся к уравнениям (32). Выделим стационарный режим движения:

$$u_c(\tau) = u_c^\circ = const = w_0 = \Phi(f_f = f_f^\circ);$$

$$v_c(\tau) = \dot{u}_c(\tau) = v_c^\circ = const = 0;$$

$$f_f(\tau) = f_f^\circ = const = \sin(0,5\sqrt{w_0}).$$

Систему (32) легко привести к нормальному виду. Основным методом изучения решений изберем метод численного интегрирования методом Розенброка. При этом будем использовать пакет прикладных программ «Mathcad» и сопоставлять решения системы (32) и уравнения (34). Убеждаемся, что стационарный режим движения перестает быть устойчивым, если точка

$$\tilde{u} = w_0$$

находится на падающей части графика эффективной характеристики трения. На рис. 12 приведено решение системы (32) при следующих параметрах и начальных условиях задачи:

$$w_0 = 0,812; \epsilon_0 = 0,800; c_n / c = 1,000; \epsilon_N = 0,125;$$

$$u_c(\tau = 0) = 1,1w_0; \dot{u}_c(\tau = 0) = 0; f_f(\tau = 0) = 0,95; f_f^\circ = 0,939.$$

Сплошной линией «1» изображен график функции  $u_c(\tau) - w_0$ ; жирной сплошной линией «2» - график функции  $f_f(\tau) - 1$ ; пунктиром – график функции  $\tilde{u}(\tau) - w_0$ . Обратим внимание на скачок на графике «2» в начале движения. Для сопоставления переменной и постоянной составляющих нормальной реакции на рис. 13 представлен график функции  $N(\tau) / N_0$ .

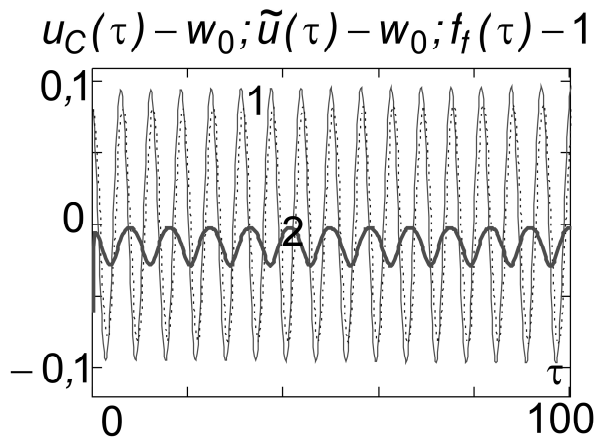


Рисунок 12 - Результаты численного интегрирования

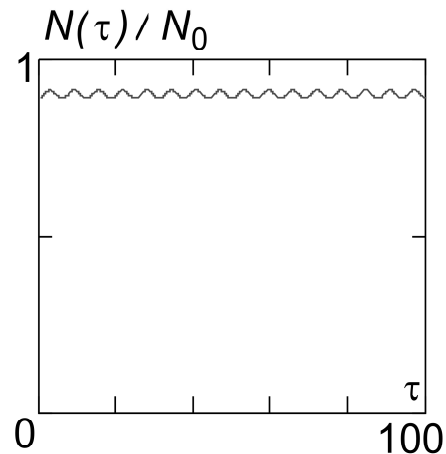


Рисунок 13 - Нормальная реакция опорной поверхности

Обсудим реализуемость закона (29). На рис. 14 изображено катящееся колесо с набором несбалансированных масс  $m_{\varepsilon i}, i = 1, \dots, n$ . Упрощая, будем полагать, что несбалансирована лишь одна масса  $m_{\varepsilon}$ ,  $m_{\varepsilon} \ll M$ . Она находится на удалении  $r$  от точки  $C$ , а угол поворота  $\varphi = \varphi(t)$  в начальный момент времени составляет  $\varphi_0$  радиан. При постоянной скорости  $V$  и отсутствии продольного скольжения угол  $\varphi$  изменяется по закону:

$$\varphi(t) = vt + \varphi_0, v = \text{const} = 2V_0 / D. \quad (35)$$

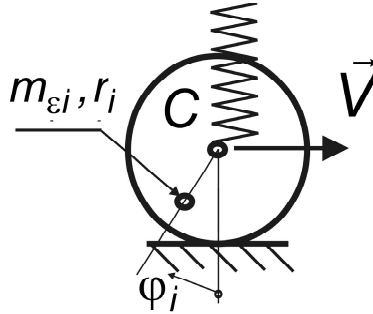


Рисунок 14 - К вопросу об изменении нормальной реакции

Из-за несбалансированности колеса нормальная реакция будет включать постоянную и переменную составляющие:

$$N = N(t) = N^0 + \Delta N(t), \quad (36)$$

где

$$N^0 = \text{const}; \Delta N(t) = m_{\varepsilon} r v^2 \cos \varphi(t), \quad (37)$$

а угол поворота изменяется по закону (35).

Как можно заключить из графика «1» рис. 12, переменная компонента фазовой переменной  $u_C(t)$  при определенных (выше оговоренных) условиях приближенно меняется по закону

$$u_C(t) - w_0 = A_* \cos(\omega t + \phi_0),$$

где  $A_* = \text{const}$  – амплитуда автоколебаний;

$\phi_0 = \text{const}$  – начальная фаза колебаний. В нашем случае (см. рис. 12)

$$A_* \approx 0,1; \phi_0 \approx 0.$$

Положим, что выполняются условия

$$\omega = v; \varphi_0 - \phi_0 = \pi. \quad (38)$$

Тогда

$$\cos \varphi(t) = [w_0 - u_C(t)] / A_*. \quad (39)$$

Если совместно рассмотреть (35)-(39) и ввести обозначения

$$N_0 = N^0 + \frac{m_{\varepsilon} r v^2 w_0}{A_*}; \varepsilon_N = \frac{m_{\varepsilon} r v^2}{A_* N_0},$$

то приходим к закону (29).

Для анализа полученных результатов с технической точки зрения укажем, закон (29) справедлив при наличии дисбаланса колеса, а также при определенной скорости движения ПКМ и определенном временном смещении (задержке) гармонических законов изменения переменной составляющей нормальной реакции и поперечных колебаний опоры шасси. Вполне понятно, что к эффекту аналогичному дисбалансу может привести кинематическое возбуждение вертикальных колебаний опоры шасси при движении по неровной опорной поверхности.

Оценим величину размерной деформации связи корпуса и шасси в условиях реальной пробежки ПКМ, исходя из того, что переменная составляющая относительного угла увода изменяется по гармоническому закону с амплитудой  $A_* = 0,1$  (рис. 12), а  $U_{cr} \approx 0,2$ . С учетом (38) имеем

$$\frac{\omega A_{**}}{U_{cr} V_0} = A_*; v = \omega = \frac{2V_0}{D},$$

где  $A_{**}$  – размерная амплитуда деформации. Отсюда находим

$$A_{**} = 0,01D.$$

Заканчивая параграф, сопоставим опыт использования модели предельного перехода [14] и предлагаемой модели. При решении рассматриваемой в параграфе модельной задачи поперечно поступательного движения ПКМ и использовании модели предельного перехода получим систему 4-х обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка со стремящемся к нулю множителем при производной [14]. При использовании модели (19), как это видно из рассмотренного примера, получим систему 3-х обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с множителем при производной лишь немногим меньшим единицы. Модель (19) допускает получение решений стандартными методами изучения жестких систем.

## 6. Выводы.

1. В работе даны описание и (или) результаты применения известных прагматических моделей поперечной силы трения на шине. Развивая идеи и подходы известных моделей, предложена новая модель – уравнение (19) и блок-схема (рис. 8).

2. На примере модельной задачи о колебаниях пневмоколесной машины при умеренном скольжении колес шасси представлены методические подходы математического моделирования колебаний пневмоколесных машин при значительных углах увода колес.

3. Показано, что при определенных обстоятельствах могут возникать поперечные автоколебания опор шасси, которые не только влияют на характеристики усталостной прочности элементов машины, но и могут явиться фактором существенно снижающим безопасность движения. Упомянутыми обстоятельствами являются: поперечная скорость корпуса машины, определенное значение продольной скорости, наличие дисбаланса колес шасси. Опасные автоколебания шасси могут возникнуть при обгоне на высокой скорости автомобиля; при посадке с боковым ударом в опоры шасси самолета и т. п.

Полученные результаты целесообразно учесть при математическом моделировании движения пневмоколесных машин; разработке рекомендаций к их проектированию; анализе причин дорожных и летных происшествий.

## Список литературы

1. I.J.M.Besselink. Shimmy of aircraft main landing gears. PhD thesis, Delft University of Technology, 2000.-201 p.
2. Clark S., Dodge R., Nybakken G. Dynamic properties of aircraft tires// J. aircraft. – 1974.- Vol.11, №3.- P. 166-172.
3. Кручинин П.А., Магомедов М.Х., Новожилов И.В. Математическая модель автомобильного колеса на антиблокировочных режимах движения//Изв. РАН «Механика твердого тела». -2001.-№6.- С.63-69.
4. Apetaur M. Modelling of transient nonlinear tire responses// Proc. of 1-st international colloquim on tire models. Delft, oc. 21-22.- 1991. -P.116-126.
5. J.S.Loeb, D.A.Guenther, Hung-Hsu F. Chen, J.R. Ellis. Lateral stiffness, cornering stiffness and relaxation length of the pneumatic tire//SAE Technical Paper Series, № 900129, 9 p.

6. G.Rill. First order tire dynamics. III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering. Lisbon, 5-8 June 2006, 9 p.
7. P.W.A. Zegelaar. The dynamic response of tyres to brake torque variations and road unevennesses. PhD thesis, Delft University of Technology, 1998.- 315 p.
8. Плахтиєнко М.П., Шифрин Б.М. Модель відведення пневматика при вимушених коливаннях// Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні :Укр. міжвідомчий наук.-техн. зб.-Львів: Нац.ун-т «Львівська політехніка», 2006, №40.- С.190-195.
9. Gim G., Nikravesh P.E. An analytic model of pneumatic tires for vehicle dynamic simulations.Part 1:Pure slips//Int. J. of Vehicle Design.–1990. –V.11, №6.-P.589-618.
10. Рачејка Н.В., Sharp R.S. Shear force development by pneumatic tires in steady-state conditions. A review of modeling aspects// Vehicle system dynamics. -1991.-V.20, № 3-4.- P.121-176.
11. Плахтиєнко Н.П., Шифрин Б.М. Одностепенная модель колебаний опоры шасси самолета//Техн. механика.-2006.-№1. -С.16-25.
12. Шифрин Б.М. О моделировании колебаний пневматиков и пневмоколесных машин.//Авиационно-космическая техника и технология.10/57, 2008.-0 С.165-169.
13. Жечев М.М. Особенности описания математических моделей механических систем, включающих элементы с нулевыми массами. // Техническая механика. – 1997.- №6. -С.108-112.
14. Шифрин Б.М. Фрикционные неустойчивость и колебания самолета на разбеге/пробеге// Восточно-европейский журнал передовых технологий. -2006.- №6/2 (24).- С.19-24.
15. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука. 1973.- 272 с.

Представлені відомі і нова (що є модернізацією відомих) математичні моделі поперечної сили тертя шини при нестационарному відведенні в умовах помірного і значного тертя. Показано застосування нової моделі для вирішення модельного завдання коливань пневмоколісної машини, колеса якої незбалансовані. Результати моделювання зіставлені з результатами моделювання для спрощеної моделі шини.

The known is presented and new (being modernization of known) mathematical models of transversal force of friction at the non-stationary withdrawal of tire in the conditions of moderate and considerable friction. Application of new model is rotined for the decision of model problem of vibrations of vehicle the wheels of which are unbalanced. Design results are confronted with the results of design for the simplified model of tire.