

УДК 519.65

В. О. ГОЛОВКО, аспірант Київського авіаційного університету, м. Київ

РОЗВ'ЯЗОК ПРЯМОЇ ТОМОГРАФІЧНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ БІЛІНІЙНОГО СПЛАЙНА

У статті зроблено спробу подати розв'язок томографічної задачі за допомогою білінійного сплайна. Вірність розрахункових виразів для прийнятих сигналів перевірена порівнянням аналітичних і чисельних розрахунків, що співпали з високою точністю. Отримані вирази для розв'язку ПТЗ є основою для подальшого розв'язку ОТЗ.

Ключові слова: пряма томографічна задача, білінійний сплайн, аналітичний і чисельний розрахунок.

Постановка проблеми у загальному вигляді. На сьогодні томографічна задача (ТЗ) добре відома, зокрема перетворення Радона використовується в рентгенівській томографії. Апроксимація розв'язку оберненої ТЗ сплайном є одним із способів регуляризації, що відноситься до проєкційних методів. Однак є томографічні задачі, розв'язок яких ускладнений (сейсмічна і акустична томографія). У монографії [2] приводяться приклади застосування сплайна для вирішення задачі сейсмічної томографії.

Мета статті – подати розв'язок прямої томографічної задачі за допомогою білінійного сплайна.

Виклад основного матеріалу дослідження. В роботі пропонується розв'язувати пряму томографічну задачу в припущенні, що область

зондування є білінійним сплайном на прямокутній сітці. Використання білінійного сплайна дозволяє отримати достатньо прості аналітичні вирази для вирішення прямої томографічної задачі.

Для розв'язку томографічних задач важливо оцінити можливість методу, оскільки задачі відносяться до некоректних за Адамаром. Для цього отримаємо розв'язок прямої томографічної задачі, яка згодом дозволить оцінити точність розв'язку оберненої задачі для точних даних.

Нехай прямокутна область зондування $x \in [0, 4), y \in [0, 4)$ описується деякою тестовою функцією

$$w(x, y) = \cos\left(x \cdot m + \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin(y \cdot n + \pi)^2 + k, \quad (1)$$

де $m=0.7, n=2, k=0$.

з приймачами та випромінювачами. Схема зондування складається з одного випромінювача (T1) і 8 приймачів (R1–R8) (рис. 1). Випромінювач знаходиться в точці (0,0), а приймачі задані матрицею

$$CR = \begin{bmatrix} 0.5 & 4 \\ 1.5 & 4 \\ 2.5 & 4 \\ 3.5 & 4 \\ 4 & 3.5 \\ 4 & 2.5 \\ 4 & 1.5 \\ 4 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

За такої схеми розміщення випромінювача і приймачів отримали 8 зондуючих променів.

Область зондування поділена на прямокутні області, на яких задано двовимірний сплайн

$$S(x, y) = S_x(x) \otimes S_y(y). \quad (3)$$

Білінійний сплайн є тензорним добутком двох лінійних сплайнів

$$S_x(x) = A_{xi} \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \right) + A_{xi+1} \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \quad (4)$$

де $i \in [0, I), j \in [0; J)$.

$A_{xi}, A_{xi+1}, A_{yj}, A_{yj+1}$ – коефіцієнти лінійних сплайнів.

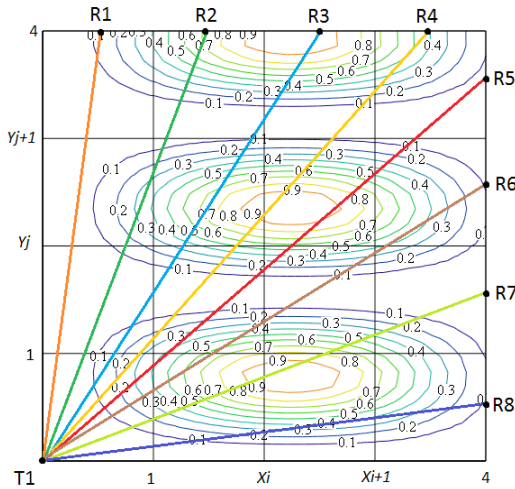


Рис. 1. Схема зондування

Якщо розглянути розрахунок значень білінійного сплайна на окремому фрагменті (рис. 3), то він задається наведеним виразом

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot B(x, y), \quad (6)$$

де a_{ij} - значення у відповідних вузлах сітки, $B(x, y)$ – спеціальні базисні функції білінійного сплайна для заданого фрагмента.

Представимо (6) у розгорнутому вигляді

$$S(x, y) = a_{ij} \cdot B_1(x, y) + a_{ij+1} \cdot B_2(x, y) + a_{i+1j} \cdot B_3(x, y) + a_{i+1j+1} \cdot B_4(x, y), \quad (7)$$

де $x \in [x_{i_j}, x_{i_{j+1}}], y \in [y_{i_j}, y_{i_{j+1}}]$.

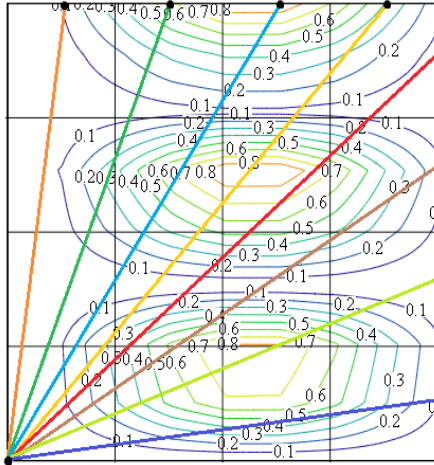


Рис. 2. Апроксимація функції $W(x,y)$ сплайном $S(x,y)$.

Розглянемо як формується сигнал приймача на окремому фрагменті.

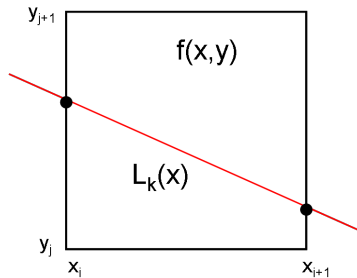


Рис. 3. Пряма зондування на локальному фрагменті

На рисунку 3 зображено проходження прямої зондування через локальний фрагмент заданої області. Припустимо, що промінь

проходить вздовж прямої $L_k(x)$. Тоді сигнал сформований на цьому проміжку буде дорівнювати інтегралу функції $f(x, y)$ вздовж прямої. Щоб уникнути двовимірності інтегрування підставимо замість значення "у" рівняння прямої $L_k(x)$. Отримаємо $f(x, L_k(x))$. Таким чином ми перейдемо від інтегрування по двом змінним до однієї змінної. Якщо розглянути вирішення цієї задачі на багатьох областях, то вони складаються з суми окремих фрагментів (рис. 4).

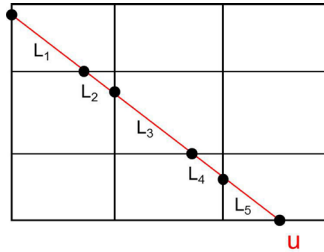


Рис. 4. Пряма зондування на всій області

Враховавши те, що область зондування є сплайном, прийнятий сигнал в кінцевому результаті буде залежати від схеми зондування і від параметрів a_{ij} , які є значеннями у вузлах цієї сітки. В загальному вигляді розраховується значення окремого приймача вздовж всієї прямої згідно з виразом:

$$u = \sum_{k=1}^K \int_{x_k}^{x_{k+1}} S(x, L_k(x), A) dx \quad (8)$$

Підставивши у (8) значення базисних функцій, отримуємо

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot B_{kij} = \sum_{k=1}^K \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot B(x, L_k(x)) \right] dx = \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} B(x, L_k(x)) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Знайдемо розрахункові вирази. Із (7) відомо, що поле сплайна задано виразом

$$S = a_{11} \cdot \left[\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} \right] + a_{12} \cdot \left[\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right] + a_{21} \cdot \left[\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} \right] + a_{22} \cdot \left[\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right]. \quad (10)$$

Рівняння прямої має вигляд

$$l = y_p \cdot \left[\frac{x_k - x}{x_k - x_p} \right] + y_k \cdot \left[\frac{x - x_p}{x_k - x_p} \right], \quad (11)$$

де x_p, y_p - координати початку прямої зондування, x_k, y_k - координати кінця прямої зондування.

Підставимо вираз (11) у (10) замість змінної "у" і отримаємо вираз

$$S = \frac{a_{11} \cdot (x - x_2) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_2 + x_p \cdot y_2 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)} - \frac{a_{12} \cdot (x - x_2) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_1 + x_p \cdot y_1 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)} - \frac{a_{21} \cdot (x - x_1) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_2 + x_p \cdot y_2 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)} + \frac{a_{22} \cdot (x - x_1) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_1 + x_p \cdot y_1 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)}. \quad (12)$$

Отримано функцію, яка залежить тільки від однієї змінної "x".

Проінтегруємо (12) і отримаємо

$$I_s = \int_{xd}^{xu} \frac{a_{11} \cdot (x - x_2) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_2 + x_p \cdot y_2 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)} - \frac{a_{12} \cdot (x - x_2) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_1 + x_p \cdot y_1 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)} - \frac{a_{21} \cdot (x - x_1) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_2 + x_p \cdot y_2 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)} + \frac{a_{22} \cdot (x - x_1) \cdot (x \cdot y_k - x \cdot y_p - x_k \cdot y_1 + x_p \cdot y_1 + x_k \cdot y_p - x_p \cdot y_k)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)} dx. \quad (13)$$

Знайдемо інтеграл від (13). Після зведення подібних та винесення коефіцієнтів отримаємо

$$I_S = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22}, \quad (14)$$

де $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ – коефіцієнти білінійного сплайну для локального фрагменту, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – значення функції у вершинах локального фрагменту.

Наведемо отримані коефіцієнти $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} A_{11} = & -\frac{1}{2}C \cdot (x_u^2 - x_d^2) \cdot (x_2 \cdot y_k + x_k \cdot y_2 - x_2 \cdot y_p - x_p \cdot y_2 - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) - \\ & -C \cdot x_2 \cdot (x_d - x_u) \cdot (x_k \cdot y_2 - x_p \cdot y_2 - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) - \\ & -\frac{1}{3}C \cdot (x_d^3 - x_u^3) \cdot (y_k - y_p); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_{12} = & \frac{1}{2}C \cdot (x_u^2 - x_d^2) \cdot (x_k \cdot y_1 + x_2 \cdot y_k - x_p \cdot y_1 - x_2 \cdot y_p - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) + \\ & +C \cdot x_2 \cdot (x_d - x_u) \cdot (x_k \cdot y_1 - x_p \cdot y_1 - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) + \\ & +\frac{1}{3}C \cdot (x_d^3 - x_u^3) \cdot (y_k - y_p); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A_{21} = & \frac{1}{2}C \cdot (x_u^2 - x_d^2) \cdot (x_1 \cdot y_k + x_k \cdot y_2 - x_1 \cdot y_p - x_p \cdot y_2 - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) + \\ & +C \cdot x_1 \cdot (x_d - x_u) \cdot (x_k \cdot y_2 - x_p \cdot y_2 - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) + \\ & +\frac{1}{3}C \cdot (x_d^3 - x_u^3) \cdot (y_k - y_p); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A_{22} = & \frac{1}{2}C \cdot (x_d^2 - x_u^2) \cdot (x_1 \cdot y_k + x_k \cdot y_1 - x_1 \cdot y_p - x_p \cdot y_1 - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) - \\ & -C \cdot x_1 \cdot (x_d - x_u) \cdot (x_k \cdot y_1 - x_p \cdot y_1 - x_k \cdot y_p + x_p \cdot y_k) + \\ & +\frac{1}{3}C \cdot [x_d^3 \cdot (y_p - y_k) + x_u^3 \cdot (y_k - y_p)], \end{aligned} \quad (18)$$

де $C = \frac{1}{(x_1 - x_2) \cdot (x_k - x_p) \cdot (y_1 - y_2)}$, x_p, y_p – координати початку прямої зондування, x_k, y_k – координати кінця прямої зондування, x_d – координата по-

чатку прямої зондування для даного локального фрагмента, x_u – координата кінця прямої зондування для даного локального фрагмента.

Використовуючи (15) – (18) знайдемо коефіцієнти поля сплайну. Згрупувавши знайдені коефіцієнти сформуємо матрицю планування. Отже, рівняння (9) можна записати у матричному вигляді

$$U = PA, \quad (19)$$

де A – значення у вузлах сітки, P – матриця планування.

Матриця P має специфічно розріджений вигляд. Розмірності матриці – 8×25 .

Кількість рядків матриці планування завжди дорівнює кількості зондуючих променів. Записавши цю матрицю, ми маємо алгоритм чисельного вирішення прямої томографічної задачі для білінійних сплайнів.

Алгоритм вирішення прямої томографічної задачі має такий вигляд:

1. Задати сітку області:

$$x_1, x_2 \dots x_j \dots x_J;$$

$$y_1, y_2 \dots y_j \dots y_J.$$

2. Задати значення у вузлах області:

$$A = a_{11}, a_{12}, \dots a_{1J}.$$

3. Задати координати випромінювачів і приймачів.

4. Визначити зондуючі промені.

5. Розрахувати параметри сплайну для локальних прямокутних областей, через які проходить промінь. Повторити це для всіх зондуючих променів.

6. Звести подібні коефіцієнти і сформувати матрицю планування.

7. Розрахувати значення у вузлах області.

Даний алгоритм реалізовано у середовищі програмування MatLab.

Для перевірки отриманих розрахункових виразів виконано чисельне вирішення прямої томографічної задачі у середовищі MathCad.

Точні значення прийнятого сигналу вздовж променю обчислювались як чисельний розв'язок інтегралу

$$u = \int w(x, L(x)) dx. \quad (20)$$

Значення інтегралу для кожного із променів рівні

$$I = \begin{bmatrix} 0.011 \\ 0.234 \\ 0.707 \\ 1.046 \\ 1.11 \\ 1.062 \\ 1.611 \\ 0.66 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Використовуючи розрахункові формули (10)–(18), обчислимо значення сигналу на кожному із приймачів. У даному випадку значення сигналу вздовж променя є сума локальних інтегралів на кожній із локальних областей. Отримано такі значення:

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.026 \\ 0.244 \\ 0.652 \\ 0.983 \\ 1.105 \\ 1.394 \\ 1.347 \\ 0.496 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Оцінимо похибку обчислень. Покажемо результат у процентному співвідношенні

$$\delta = \frac{I}{\Delta I} \cdot 100\% \approx \begin{matrix} 142\% \\ 4.4\% \\ 7.7\% \\ 6\% \\ 0.5\% \\ 31\% \\ 16\% \\ 24.8\% \end{matrix}, \quad (23)$$

де $\Delta I = I - \tilde{I}$.

Як видно із (23) деякі значення мають значну похибку. Для зменшення похибки необхідно збільшити кількість фрагментів.

Чисельний розв'язок у MathCad вздовж лінії зондування по апроксимованому сплайну по формулі (8) показав значення у приймачах, що співпадають із \tilde{I} (22) розрахованими за отриманими виразами (10)–(18).

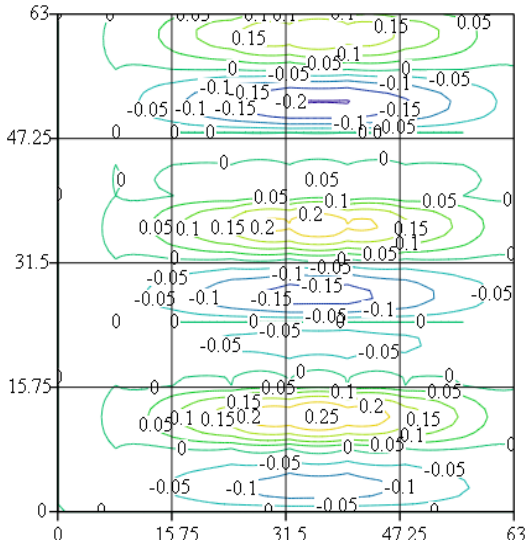


Рис. 5. Похибка апроксимації сплайном

Висновки. 1. Отримано розрахункові вирази для заданої томографічної схеми зондування при апроксимації поля білінійним сплайном.

2. Вірність розрахункових виразів для прийнятих сигналів перевірена порівнянням аналітичних і чисельних розрахунків, що співпали з високою точністю.

3. Основна похибка вирішення прямої ТЗ обумовлена похибкою апроксимації реального поля білінійним сплайном. Зменшення похибки досягається збільшенням числа фрагментів сплайна.

4. Отримані вирази для розв'язку ПТЗ є основою для подальшого розв'язку ОТЗ.

Перспективи досліджень у даному напрямку – розроблення розрахункових виразів для подальшого розв'язку ОТЗ.

Список використаної літератури

1. N. Rawlinson. Seismic tomography: A window into deep Earth / Rawlinson and S. Pozgay and S. Fishwick, Physics of the Earth and Planetary Interiors, Vol.178, Issues 3–4, 2010, P.101–135.

2. Математические задачи компьютерной томографии / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, А. А. Тимонов. – М.: НАУКА, 1987. – 160 с.

3. Сейсмическая томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике : пер. с англ. / Г. Нолет [и др.] ; ред. – М. : Мир, 1990. – 415 с.

4. Шелевицький І. В. Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми / під ред. М. О. Шутка – Кривий Ріг : Європейський університет, 2002. – 304 с.

Рецензент – доктор технічних наук, професор Шелевицький І. В.

Стаття надійшла до редакції 22.04.2014.

Головка В.А. Решение прямой томографической задачи с помощью билинейного сплайна

В статье сделана попытка привести решение прямой томографической задачи с помощью билинейного сплайна. Верность

расчетных выражений для принятых сигналов проведена сравнением аналитических и числовых расчетов, которые совпали с высокой точностью. Полученные выражения для решения ТПЗ являются основой для дальнейшего решения ОТЗ.

Ключевые слова: *прямая томографическая задача, билинейный сплайн, аналитический и числовой расчет.*

Holovko V. O. Solving of direct tomographic problem by means of bilinear spline

The article concerns solutions direct tomographic problem using bilinear spline. The methods, tools, algorithms for solving problems concerning acoustic tomographic imaging and the use of tomographic problems splines are described. The paper solved directly tomographic problem under the assumption that sensing area is bilinear spline on a rectangular grid. Using bilinear spline enables to obtain rather simple analytical expressions for the solution of direct tomographic problem. Order to solve tomographic important tasks was to assess the capabilities of the method, since the problems related to incorrect by Hadamard. The resulting solution of the direct problem of tomographic were later to assess accuracy of the solution of the inverse problem for accurate data. The algorithm, software and the results on numerical models were tested. An estimated expression for a given tomographic sensing scheme with bilinear spline approximation of the field is explained. Fidelity calculated expressions for the received signals is tested by comparing the analytical and numerical calculations, which coincided with high accuracy, the basic error of solving the direct problem of tomographic error due to the approximation of the real field bilinear spline. Error reduction is achieved by increasing the number of fragments spline. The expressions for the solution of the direct problem of tomography is the basis for the further solution of the inverse tomographic problem. The practical significance of the results presented is to improve the accuracy of acoustic tomography problem solution under high noise level by two-dimensional spline approximation solution. Getting a cheap simple non-destructive

investigation of heterogeneous bodies (eg, foundations, biological objects) in technical and medical diagnosis is analyzed.

Keywords: *direct tomographic problem, bilinear spline, analytical and numerous calculation.*