

## FAIR CURVES SIMULATION RELATIVELY TO PROFILES OF AXIAL-FLOW TURBINES BLADES

### МОДЕЛЮВАННЯ ПЛАВНИХ КРИВИХ СТОСОВНО ПРОФІЛІВ ЛОПАТОК ОСЬОВИХ ТУРБІН

**Mykhailo R. Tkach**

[mykhaylo.tkach@nuos.edu.ua](mailto:mykhaylo.tkach@nuos.edu.ua)

ORCID: 0000-0003-3708-6912

**Oleksii Yu. Aharkov**

[kenny90@inbox.ru](mailto:kenny90@inbox.ru)

ORCID: 0000-0002-6810-0943

**М. Р. Ткач,**

д-р техн. наук, проф.;

**О. Ю. Агарков,**

асп.

**National University of Shipbuilding, Mykolayiv**

*Національний університет кораблебудування, м. Миколаїв*

**Abstract.** Geometric modeling of the smooth curves, consisting of two segments, which provide the equality of the coordinates at the point of their coupling, derivatives and the curvature of the curve, is considered. The main aim of the research is to develop and implement the algorithm for the component curve designing, consisting of two segments which meet conditions of the third order of smoothness in the point of docking. Each of the segments is designed in the natural coordinate system where the orthogonal points of the curve are considered as the application to the length of the arc. The curvature of the curve is assumed to be described by the second-degree polynomial. The set of kinematic and geometric parameters becomes defined after the gas-dynamic calculation of the turbine, for example height of the blades, their axial length, inlet and outlet flow angles, lattice spacing etc. As a result, the coordinates of tangency points of the pressure and suction surfaces with the front and trailing edges are calculated. The method of construction of a component curve is developed as it applies to the design of the pressure and suction surfaces of the shoulder-blades of the axial turbines. Calculation and visualization of the data obtained confirm the possibility of the component curves designing using the quadratic dependence of their curvature on the length of the arc.

**Keywords:** compound curve simulation, third order of smoothness, quadratic dependance of the curvature, profile of the axial-flow turbine blade.

**Анотація.** Запропоновано методику побудови плавної кривої, що складається з двох ділянок, які стикуються за умови забезпечення третього порядку гладкості. Кожна з ділянок моделюється в натуральній системі координат із застосуванням квадратичної залежності їх кривини від довжини дуги обводу. Методику побудови складеної кривої розроблено стосовно моделювання обводів спинки і коритця профілів лопаток осьових турбін.

**Ключові слова:** моделювання складеної кривої, третій порядок гладкості, квадратична залежність кривини, профіль лопатки осьової турбіни.

**Аннотация.** Предложена методика построения плавной кривой, состоящей из двух участков, которые стыкуются в соответствии с обеспечением третьего порядка гладкости. Каждый из участков моделируется в естественной системе координат с применением квадратичной зависимости их кривизны от длины дуги обвода. Методика построения составной кривой разработана применительно к моделированию обводов спинки и корытца профилей лопаток осевых турбин.

**Ключевые слова:** моделирование составной кривой, третий порядок гладкости, квадратичная зависимость кривизны, профиль лопатки осевой турбины.

#### REFERENCES

- [1] Aronov B.M., Zhukovskiy M.I., Zhuravlev V.A. *Profilirovaniye lopatok aviatsionnykh gazovykh turbin* [Profiling of aviation gas turbine blades]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 192 p.
- [2] Boyko A.V., Garkusha A.V. *Aerodinamika protochnoy chasti parovykh i gazovykh turbin: raschety, issledovaniya, optimizatsiya, proektirovaniye* [Aerodynamics of the flow of steam and gas turbines: calculation, research, optimization, design]. Kharkov, KhGPU Publ., 1999. 360 p.

- [3] Borysenko V.D., Ustenko S.A., Spitsyn V.Ye. Heometrychne modeliuвання ploskoho kryvoliniinoho obvodu za zadanoiu kryvynoiu [Geometric modeling of planar curved bypass by the given curvature]. *Heometrychne ta kompiuterne modeliuвання – Geometric and computational modeling*, 2004, issue 5, pp. 30–34.
- [4] Karelin A.M. Postroenie reshetki turbinykh profiley na osnove ratsionalnykh parametriceskikh krivykh [Lattice construction of turbine profiles on the basis of rational parametric curves]. *Lopatochnye mashiny i struynye apparaty – Turbomachinery and jet devices*, 1989, issue 9, pp. 79–89.
- [5] Kini R.P., Raykha Kh. *Prinyatie resheniy pri mnogikh kriteriyakh: predpochteniya i zameshcheniya* [Multiple-criteria decision analysis: preferences and replacements]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1981. 560 p.
- [6] Mamaev B.I., Ryabov Ye.K. Postroenie reshetki turbinykh profiley metodom dominiruyushchey krivizny [Lattice construction of turbine profiles by the method of dominant curvature]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*, 1979, issue 2, pp. 52–55.
- [7] Polikarpov A.L. Primenenie sostavnykh krivykh Beze dlya postroeniya reshetok turbinykh profiley [Application of composite Bezier curves for lattice construction of turbine profiles]. *IVUZ Energetika – Energetics*, 1991, issue 3, pp. 89–93.
- [8] Rashevskiy P.K. *Kurs differentsialnoy geometrii* [Differential geometry course]. Moscow-Lvov, GITTL Publ., 1950. 428 p.
- [9] Slitenko A.F., Kuzmenko A.A. Postroenie reshetok turbinykh profiley s pomoshchyu polinomov Beziera–Bernshteyna [Lattice construction of turbine profiles using the Bernstein polynomials]. *Mashinostroenie – Mechanical Engineering*, 1988, issue 9, pp. 77–81.
- [10] Hooke R., Jeeves T.A. Direct search solution of numerical and statistical problems. *Journal of the ACM*, 1961, vol. 8, no 2, pp. 212–229.
- [11] Pritchard L.J. The eleven parameter axial turbine airfoil geometry model. *ASME paper*, 1985, 85-GT-219. 12 p.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Задачі побудови плавних кривих ліній, що з'єднують певну сукупність базових (опорних) точок, виникають у багатьох галузях науки і техніки. Вони є актуальними для енергетичної галузі промисловості. У сучасних умовах розробникам проектів нових виробів енергетики доводиться розв'язувати різноманітні геометричні задачі. Ці задачі надзвичайно важливі при проектуванні аеро- та гідродинамічних обводів літальних апаратів, лопаткових апаратів турбін, робочих коліс відцентрових компресорів і доцентрових турбін, підвідних і відвідних пристроїв для проходження робочої речовини. Вони також є актуальними і в суднобудуванні, де проектантам суден доводиться моделювати обводи шпангоутів, ватерліній, батоксів, створювати обтічні форми носової і кормової частин корпусу судна.

Розробка проектів осьових турбін нерозривно пов'язана зі створенням нових лопаткових апаратів турбін і компресорів, які формують їх проточні частини. Забезпечення високих аеродинамічних характеристик лопаткових апаратів приводить до необхідності надання їм складної геометричної форми, що вимагає застосування нових, більш ефективних підходів до моделювання як плоских перерізів турбінних лопаток, так і поверхонь, що обмежують течію робочої речовини.

## АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У практиці створення лопаткових апаратів сучасних осьових турбін застосовуються різноманітні математичні криві: дуги кіл, еліпсів, парабол, гіпер-

болічних спіралей, лемніскат Бернуллі, багатостепенних поліномів та інших відомих кривих [1, 2, 11]. Автори деяких публікацій для подання обводів спинки і коритця профілів лопаток застосовують комбінації перелічених кривих, стикування яких відбувається в горлі міжлопаткового каналу з порядком гладкості не вище другого.

Перспективним при моделюванні обводів профілів лопаток осьових турбін слід вважати застосування кривих Безье, *B*-сплайнів, *NURBS*-кривих та співзвучних з ними раціональних параметричних кривих [4, 7, 9]. Проте при простоті побудови вказаних кривих, що здається, їх ефективне використання пов'язане з певними проблемними моментами, обумовленими раціональним розміщенням так званих вузлових (опорних) точок, які в першому наближенні подають майбутню плавну криву.

У роботі [6] обводи спинки і коритця профілю лопатки пропонується моделювати на базі методу домінуючої кривини, в якому передбачається використовувати кусково-лінійні графіки розподілу кривини. Співзвучні підходи застосовані в роботі [3], в якій профіль лопатки моделюється з використанням лінійного закону розподілу кривини вздовж дуги обводу, хоча розв'язання задачі реалізовано в іншому плані. Невідомі коефіцієнти закону розподілу кривини знаходяться розв'язанням системи відповідних нелінійних інтегральних рівнянь методом Ньютона–Рафсона. Цей метод передбачає визначення похідних шуканої функції від невідомих коефіцієнтів, що робить його дуже чутливим до «поведінки» цих похідних

та інколи призводить до розбіжності обчислювального процесу.

**МЕТОЮ СТАТТІ** є розробка методики моделювання кривої, складеної з двох ділянок, які стикаються із забезпеченням третього порядку гладкості, призначеної для побудови обводів спинки і коритця профілів лопаток осевих турбін. Ділянки кривих моделюються в натуральній системі координат із застосуванням параболічних графіків розподілу кривини.

### ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Профільовання лопаток осевих турбін відбувається по завершенні термогазодинамічного розрахунку, в результаті якого стають відомими висоти лопаток, їх осеві протяжності, кути входу і виходу потоку на решітку профілів і деякі інші кінематичні та геометричні параметри. Далі на підставі емпіричних або статистичних даних визначаються крок решітки, кут установки профілю, радіуси вхідних і вихідних кромок, кути їх загострення, максимальна товщина профілю, кут його відгину в горлі каналу тощо. Це дає можливість розраховувати координати початкової та кінцевої точок обводів спинки і коритця профілю та кути нахилу в них дотичних. Для спинки профілю проміжну (третю) точку знаходять, знаючи горло каналу і кут відгину профілю. Проміжна точка для коритця визначається при розташуванні кола, що відповідає максимальній товщині профілю і розташовано на визначеній відстані від вхідної кромки.

Таким чином, для спинки і коритця профілю стають відомими координати і кути нахилу дотичних у трьох точках.

Розв'яжемо наступну задачу. Нехай задано три точки, в яких відомі також похідні, визначені кутами  $\varphi_i$  нахилу дотичних. Необхідно побудувати плоску криву, що проходить через ці точки і має в них означені кути нахилу дотичних.

Розглянемо моделювання плоскої кривої, яка складається із двох сегментів, що генеруються в натуральній системі координат і кривина яких підпорядковується квадратичній залежності від довжини дуги обводу вигляду

$$K_i = a_i s^2 + b_i s + c_i, \quad (1)$$

де  $K_i$  – кривина кривої;  $a_i, b_i, c_i$  – коефіцієнти, які підлягають визначенню при моделюванні кривої;  $s$  – поточна довжина дуги кривої;  $i$  – номер сегмента.

Стиккування цих сегментів виконаємо за умови, що в спільній точці матимуть рівні значення похідні, кривина та похідні від кривини. Такі умови відповідають третьому порядку гладкості. Користуючись рівністю кривини і похідних від неї, можна встановити певний взаємозв'язок між невідомими коефіцієнтами виразу (1).

Зазначимо, що для зменшення обчислювальних труднощів прийнято, що в точках 1 і 2 (рис. 1) довжина дуги першого і другого сегментів буде дорівнювати нулю, тобто  $s = 0$ . Отже, якщо кривина у точці стиккування сегментів є величиною однаковою, то можна отримати наступне:

$$a_1 S_1^2 + b_1 S_1 + c_1 = c_2, \quad (2)$$

де  $S_1$  – довжина дуги першого сегмента.

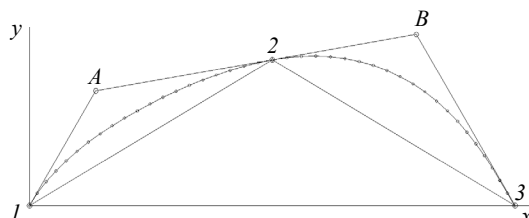


Рис. 1

З того факту, що в точці стиккування сегментів похідна від кривини дуги є рівною, можна отримати

$$2a_1 S_1 + b_1 = b_2. \quad (3)$$

З курсу диференціальної геометрії [8] відомо, що приріст кута нахилу дотичної  $d\varphi$  до осі  $x$  дорівнює добутку кривини кривої  $K(s)$  на диференціал дуги  $ds$ :

$$d\varphi = K(s) ds.$$

З цього виразу інтегруванням можна знайти кут нахилу дотичної до кривої в довільній її точці:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s K(s) ds.$$

З урахуванням залежності (1), записаної, наприклад, для першого сегмента кривої, можна отримати наступний вираз для визначення розподілу кута нахилу дотичної:

$$\varphi(s) = \varphi_1 + \int_0^s K(s) ds = \varphi_1 + \frac{a_1 s^3}{3} + \frac{b_1 s^2}{2} + c_1. \quad (4)$$

Вираз, подібний (4), можна записати і для другого сегмента кривої, що моделюється.

Залежність (2) для кінцевої точки першого сегмента кривої набуде вигляду

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{a_1 S_1^3}{3} + \frac{b_1 S_1^2}{2} + c_2. \quad (5)$$

Для другого сегмента кривої цей вираз матиме вигляд

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{a_2 S_2^3}{3} + \frac{b_2 S_2^2}{2} + c_2. \quad (6)$$

Вирази (5) і (6) дозволяють визначити коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$ , відповідно:

$$a_1 = \frac{3}{S_1^2} \left( \frac{\Delta\varphi_1}{S_1} - \frac{b_1 S_1}{2} - c_1 \right); \quad (7)$$

$$a_2 = \frac{3}{S_2^2} \left( \frac{\Delta\varphi_2}{S_2} - \frac{b_2 S_2}{2} - c_2 \right), \quad (8)$$

де  $\Delta\varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_1$ ;  $\Delta\varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_2$ .

Спираючись на диференціальну геометрію, можна записати наступні залежності, які дозволяють при заданих початкових точках розраховувати координати кінцевих точок:

$$x_2 = x_1 + \int_0^{S_1} \cos K_1(s) ds; \quad y_2 = y_1 + \int_0^{S_1} \sin K_1(s) ds;$$

$$x_3 = x_2 + \int_0^{S_2} \cos K_2(s) ds; \quad y_3 = y_2 + \int_0^{S_2} \sin K_2(s) ds.$$

Для побудови бажаної складеної кривої необхідно визначити шість коефіцієнтів рівняння (1), взятого для двох сегментів, а також знати довжини кривих  $S_1$  і  $S_2$ . Отже, необхідно визначити вісім невідомих величин, що потребує, відповідно, наявності такої ж кількості рівнянь.

У першу чергу, до цих рівнянь відносяться записані вище залежності, які зв'язують координати початкових і кінцевих точок сегментів кривих. До них додають вирази (2), (3) і (7), (8).

Пошук невідомих величин здійснюється шляхом розв'язання задачі мінімізації відхилення проміжно отриманої кривої від заданих точок 2 і 3. Для цього застосовано високоефективний алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований в роботі [10]. Перевагою цього алгоритму є те, що він не застосовує частинні похідні від функції, яка мінімізується.

Оскільки у задачі, яка розв'язується, існують два критерії, бо крива, яка вийшла з точки 1, має пройти спочатку через точку 2, а потім через точку 3, то вона відноситься до класу багатоцільових задач. У цій роботі для її розв'язання застосовано метод Гермейєра [5], який передбачає використання для цільової функції (у даному випадку існують дві цільові функції  $W_i$ ) єдиного показника  $Q$ , в якому цим складовим приписують різну вагу  $\lambda_i$ , пронормовану на 1. Тобто

$$Q = \sum \lambda_i W_i, \\ \sum \lambda_i = 1.$$

Безпосередньо при розв'язанні поставленої задачі задіяні чотири параметри:  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $S_1$  і  $S_2$ . Це обумовлюється тим, що коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$  можуть бути розраховані за виразами (7) і (8), а коефіцієнти  $c_2$  і  $b_2$  – за виразами (2) і (3).

Вище (див. рис. 1) наведено графічні результати розв'язання тестової задачі, пов'язаної з побудовою складеної із двох сегментів кривої, що проходить че-

рез довільно обрані точки 1–3, в яких були задані кути нахилу дотичних. На цьому рисунку цифрами позначені вихідні точки, а літерами  $A$  і  $B$  – точки, які знаходяться на перетині дотичних, проведених до вихідних точок. Нахил дотичних визначається кутами  $\varphi_1$ – $\varphi_3$  у відповідних вихідних точках. Чотирикутник  $LAB3$  обумовлює зону, в якій має розташуватися крива, що моделюється. Маленькі кола на кривій відповідають розрахунковим точкам, які потім з'єднані відрізками прямих ліній. Як свідчать наведені дані, змодельована крива повністю відповідає поставленим умовам, вона проходить через задані вихідні точки та є дотичною до ламаної  $LAB3$ .

На рис. 2 наведені графіки розподілу кривини та похідної від неї, які наочно підтверджують, що залежність кривини кривої від її довжини має плавний характер. Графіки розподілу похідної кривини дуги від довжини дуги мають лінійний характер, але в точці стикування сегментів кривих прямі, що відповідають першому і другому сегментам, перетинаються, забезпечуючи рівність значень указаних похідних.

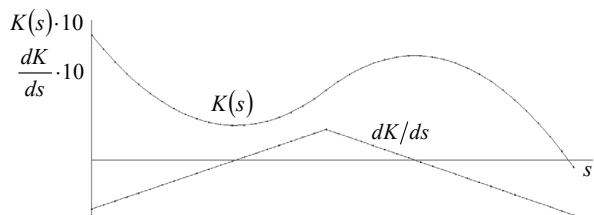


Рис. 2

Отже, графічна інформація, яка показана на рис. 2, підтверджує, що стикування двох ділянок кривих виконано із забезпеченням третього порядку гладкості.

Результати моделювання тестової задачі, пов'язаної з моделюванням спинки профілю соплової лопатки, показані на рис. 3. Вони підтверджують можливість досягнення поставленої задачі.

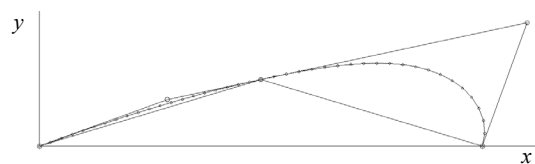


Рис. 3

### ВИСНОВКИ

Виконані дослідження і наведені графічні результати підтверджують можливість побудови складених кривих із застосуванням квадратичних графіків розподілу кривини та забезпеченням третього порядку гладкості. Ці криві можуть бути застосовані при побудові профілів лопаток осьових турбін.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] **Аронов, Б. М.** Профилирование лопаток авиационных газовых турбин [Текст] / Б. М. Аронов, М. И. Жуковский, В. А. Журавлев. – М. : Машиностроение, 1975. – 192 с.
- [2] **Бойко, А. В.** Аэродинамика проточной части паровых и газовых турбин: расчеты, исследования, оптимизация, проектирование [Текст] / А. В. Бойко, А. В. Гаркуша. – Х. : ХГПУ, 1999. – 360 с.
- [3] **Борисенко, В. Д.** Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривою [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Х. : ХДУХТ, 2004. – Вип. 5. – С. 30–34.
- [4] **Карелин, А. М.** Построение решетки турбинных профилей на основе рациональных параметрических кривых [Текст] / А. М. Карелин // Лопаточные машины и струйные аппараты. – М. : ЦИАМ, 1989. – Вып. 9. – С. 79–89.
- [5] **Кини, Р. П.** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения [Текст] / Р. П. Кини, Х. Райха. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.
- [6] **Мамаев, Б. И.** Построение решетки турбинных профилей методом доминирующей кривизны [Текст] / Б. И. Мамаев, Е. К. Рябов // Теплоэнергетика. – 1979. – № 2. – С. 52–55.
- [7] **Поликарпов, А. Л.** Применение составных кривых Безье для построения решеток турбинных профилей [Текст] / А. Л. Поликарпов // ИВУЗ «Энергетика». – 1991. – № 3. – С. 89–93.
- [8] **Рашевский, П. К.** Курс дифференциальной геометрии [Текст] / П. К. Рашевский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 428 с.
- [9] **Слитенко, А. Ф.** Построение решеток турбинных профилей с помощью полиномов Безиера–Бернштейна [Текст] / А. Ф. Слитенко, А. А. Кузьменко // ИВУЗ «Машиностроение». – 1988. – № 9. – С. 77–81.
- [10] **Hooke, R.** Direct search solution of numerical and statistical problems [Text] / R. Hooke, T. A. Jeeves // Journal of the ACM. – 1961. – Vol. 8, № 2. – P. 212–229.
- [11] **Pritchard, L. J.** An eleven parameter axial turbine airfoil geometry model [Text] / L. J. Pritchard // ASME paper. – 1985. – 85-GT-219. – 12 p.

---

© М. Р. Ткач, О. Ю. Агарков

Надійшла до редколегії 26.03.2014

Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК  
д-р техн. наук, проф. *Б. Г. Тимошевський*